Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Кафедра «Теория вероятностей и математическая статистика»

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.М. Эйсымонт

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения

Для бакалавров направления 38.03.01 (080100.62) «Экономика»

Москва 2014

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования

«ФИНАНСОВЫЙУНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Кафедра «Теория вероятностей и математическая статистика»

УТВЕРЖДАЮ
Директор Института
заочного обучения
__________ Н.В. Зверева
10 09 2014 г.

А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.М. Эйсымонт

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения

Для бакалавров направления 38.03.01 (080100.62) «Экономика»

Рекомендовано кафедрой «Теория вероятностей и математическая статистика», протокол № 11 от 19июня2014 г.

Москва 2014

УДК 519.2(072)

ББК 22.17я73

Рецензент: С.А.Зададаев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

П-64 А.В. Потемкин, М.Н. Фридман, И.М. Эйсымонт

«Теория вероятностей и математическая статистика». Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения. Для бакалавров направления 080100.62 «Экономика». – М.: Финуниверситет, 2014. – 95 с.

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является базовой компонентой цикла математических и естественнонаучных дисциплин ФГОС ВПО по направлению 080100.62 «Экономика». Учебно-методическое пособие содержит программу дисциплины, разбор типовых задач, варианты контрольной работы, методические указания по компьютерному тестированию, примеры и типовой вариант теста, список основной и дополнительной литературы.

УДК 519.2(072)

ББК 22.17я73

Учебное издание

Александр Владимирович Потемкин

Мира Нисоновна Фридман

Инна Михайловна Эйсымонт

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения

Компьютерный набор, верстка: Потемкин А.В., Эйсымонт И.М.

Формат 60x90/16. Гарнитура *Times New Roman*

Электронное издание

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» занимает особое место среди общеобразовательных дисциплин, т.к. она, во-первых, является теоретической математической дисциплиной, основанной на строгой системе определений, аксиом, теорем и вытекающих из них формул, а во-вторых, являясь теоретической базой статистических дисциплин, она дает научное обоснование прикладным методам, широко используемым на практике при обработке реальных данных.

Целями изучения данной дисциплины являются:

1) овладение навыками «вероятностного мышления», вероятностного подхода к постановке и решению задач;

2) выработка навыков обработки результатов наблюдения и умений правильно, в терминах теории вероятностей, формулировать и осмысливать полученные результаты;

3) развитие логического мышления и умения выявлять общие закономерности исследуемых процессов.

Для достижения поставленных целей в процессе обучения студентов ставятся следующие задачи:

1) изучить основные понятия, определения, аксиомы, принципы и теоремы теории вероятностей;

2) сформировать умение применять теоретические знания при решении конкретных задач теории вероятностей и статистики;

3) овладеть статистическими методами обработки данных;

4) выработать навыки постановки статистических задач, их решения методами математической статистики, анализа и интерпретации результатов.

2. Содержание дисциплины

Основное содержание дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для бакалавров направления «экономика» и требования, предъявляемые образовательными стандартами к результатам освоения дисциплины, изложены в рабочей программе учебной дисциплины. В настоящем пособии приведем перечень экзаменационных вопросов, который поможет студентам систематизировать полученные знания и подготовиться к сдаче экзамена.

Следует обратить внимание на то, что часть вопросов, например, вопрос о статистическом определении вероятности и теореме Бернулли, являются комплексными и направлены на проверку понимания связей между различными понятиями курса. Так статистическое определение вероятности, как правило, обсуждается на первой лекции, теорема Бернулли доказывается на последней, а на экзамене студент должен понимать, что теорема Бернулли является теоретическим обоснованием справедливости и статистического, и классического определений вероятности в тех случаях, когда они оба применимы.

Часть вопросов помечена «*». Эти вопросы по усмотрению преподавателя могут быть включены в перечень обязательных и рассмотрены на лекции, могут быть предложены для самостоятельного изучения студентами или могут быть представлены в форме реферативных докладов.

Экзаменационные вопросы

1. Классификация случайных событий: возможные и невозможные события, совместные и несовместные, противоположные и достоверные события. Примеры.

2. Полная группа событий. Пространство элементарных исходов. Примеры.

3. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности события. Примеры.

4. Статистическое определение вероятности события. Примеры. Теорема Бернулли (с доказательством).

5. Геометрическое определение вероятности. Примеры.

6. Сумма событий и ее свойства. Примеры.

7. Теорема сложения вероятностей (с доказательством) и ее следствия. Примеры.

8. Произведение событий и его свойства. Примеры.

9. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.

10.* Формулы полной вероятности и Байеса. Примеры.

11. Случайная величина (определение). Дискретная случайная величина и ее закон (ряд) распределения. Основное свойство закона распределения. Примеры.

12.* Совместный закон распределения двух дискретных случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Примеры. Основное свойство совместного закона распределения для независимых случайных величин.

13.* Математические операции над дискретными случайными величинами. Примеры.

14. Функция распределения случайной величины, ее определение, свойства и график. Примеры.

15. Функция распределения дискретной случайной величины. Примеры.

16. Теорема о существовании случайной величины с заданной функцией распределения. Непрерывная случайная величина. Вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины. Примеры.

17. Абсолютно непрерывная случайная величина. Плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины, ее определение, свойства и график. Примеры.

18. Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Примеры.

19. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение случайной величины. Примеры.

20. Закон распределения Бернулли, его определение, свойства и примеры.

21. Биномиальный закон распределения, его определение, свойства и примеры.

22. Закон распределения Пуассона, его определение, свойства и примеры.

23.* Геометрическое распределение, его определение, свойства и примеры.

24. Равномерный закон распределения, его определение, свойства и примеры.

25. Нормальный (гауссовский) закон распределения. Геометрический и вероятностный смысл параметров нормального закона распределения. Примеры.

26.* Стандартный нормальный закон распределения. Функция Гаусса, ее свойства и график. Теорема о связи плотности нормального закона распределения и функции Гаусса.

27.* Функция Лапласа, ее свойства, график и геометрический смысл. Теорема о связи функции распределения нормального закона и функции Лапласа. Примеры.

28.* Свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону. Правило трех сигм. Примеры.

29.* Показательный (экспоненциальный) закон распределения, его определение, свойства и примеры.

30. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Примеры.

31. Понятие о центральной предельной теореме. Локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа, условия их применимости. Примеры.

32.* Следствия из интегральной теоремы Муавра—Лапласа. Примеры.

33. Асимптотическая формула Пуассона и условия ее применимости. Примеры.

34. Лемма Чебышева. Примеры.

35. Неравенство Чебышева. Примеры.

36.* Понятие двумерной (n-мерной) случайной величины. Примеры. Одномерные распределения ее составляющих. Условные распределения.

37.* Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин.

38.* Понятие о двумерном нормальном законе распределения. Условные математические ожидания и дисперсии.

39. Вариационный ряд, его разновидности. Средняя арифметическая и дисперсия ряда. Гистограмма.

40. Генеральная совокупность. Выборки и способы их получения. Репрезентативная выборка.

41. Точечные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности и их свойства: несмещенность, состоятельность, эффективность.

42. Выборочная доля как точечная оценка генеральной доли, ее несмещенность и состоятельность.

43. Выборочная средняя как точечная оценка генеральной средней, ее несмещенность и состоятельность.

44. Выборочная дисперсия как точечная оценка генеральной дисперсии, ее смещенность и состоятельность. Несмещенная оценка генеральной дисперсии.

45. Интервальные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности. Доверительная вероятность. Предельная ошибка выборки. Средние квадратические ошибки выборок.

46. Построение доверительного интервала для генеральной доли признака.

47. Построение доверительного интервала для генеральной средней.

48. Определение необходимого объема повторной и бесповторной выборок при оценке генеральной средней и доли.

49. Основные принципы проверки статистических гипотез.

50.* Критерий χ^2 – Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения.

51.* t – критерий Стьюдента для проверки значимости коэффициента корреляции.

52. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Различия между ними. Основные задачи теории корреляции.

53. Линейная парная регрессия. Система нормальных уравнений для определения параметров прямых регрессии. Выборочная ковариация.

54. Оценка тесноты связи. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.

3. Разбор типовых задач

Пример 3.1. Дано 5 карточек с буквами К, М, Р, О, Я. Найти вероятность того, что:

а) наугад выбранные и разложенные в ряд одна за другой три карточки образуют слово РОМ;

б) при случайном расположении в ряд всех пяти карточек получится слово МОРЯК.

Решение. а) Пусть события A – *при выборе трех карточек получится слово РОМ*. Различные комбинации трех букв из имеющихся пяти представляют собой размещения [1, стр. 27], так как могут отличаться как составом входящих букв, так и порядком их следования, или и тем, и другим. Общее число таких размещений, а значит, и число исходов эксперимента, будет равно $n = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60$. При этом, благоприятный исход ровно один $m = 1$. Таким образом, согласно классическому определению вероятности [1, стр. 16], вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017.$$

б) Пусть событие B – *при случайном расположении в ряд всех пяти карточек получится слово МОРЯК*. Различные комбинации из имеющихся пяти букв представляют собой перестановки [1, стр. 27], так как отличаются друг от друга только порядком следования букв. Таким образом, общее число исходов этого эксперимента равно числу перестановок из пяти букв, т.е. $n = P_5 = 5! = 120$. Число исходов, благоприятствующих событию B, составляет $m = 1$. Поэтому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083. \square$$

Пример 3.2. Дано 6 карточек с буквами. На трех из них написана буква *A*, на двух – буква *H* и на одной буква *C*. Найти вероятность того, что при расстановке всех букв в ряд получится слово АНАНАС.

Решение. Пусть событие *A* – *получилось слово АНАНАС*. В отличие от примера 1, здесь буквы в слове повторяются. Поэтому число всевозможных случаев будет определяться числом перестановок с повторениями: $n=\dfrac{P_6}{P_3\cdot P_2}=\dfrac{6!}{3!\cdot 2!}=60$, а число случаев, благоприятствующих событию *A*, равно $m=1$. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{60}\approx 0{,}0167\,.\ \square$$

Пример 3.3. В классе учатся 10 юношей и 15 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три школьника. Найти вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

Решение. По условию задачи испытание состоит в том, что для дежурства производится выбор трех учащихся из их общего количества, равного 25. В нашем случае, когда фамилии дежурных не важны, а важен лишь их пол, все исходы такого эксперимента будут представлять собой полную группу событий, которая может быть представлена схематично (Рис. 3.1). Суть представленной схемы следующая.

В классе всего 25 человек, среди которых 10 юношей и 15 девушек (верхняя строка схемы). В результате испытания из 25 человек отбирают троих (в нижних строках столбец по центру). Среди этих трех человек может встретиться от 0 до 3 юношей (левый столбец нижних строк) и, наоборот, от 3 до 0 девушек (правый столбец нижних строк). Так, например, если юношей отобрано трое, то формально можно сказать, что девушек отобрано нуль (на схеме это событие выделено цветом). Рассуждая аналогично, получаем все остальные возможные исходы данного испытания.

Заметим, что такие события в данном случае не являются равновозможными, но их вероятности могут быть найдены с помощью комбинаторики.

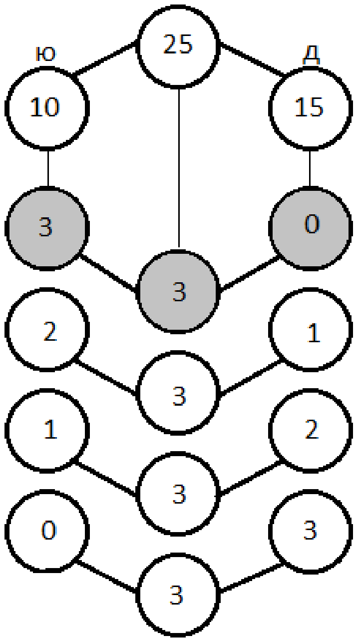


Рис. 3.1

Поскольку порядок выбора учащихся не важен, то имеем дело с сочетаниями без повторений [1, стр. 28], т.е., общее число таких равновозможных исходов данного испытания – это число сочетаний из 25 по 3:

$$n = C_{25}^{3} = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = \frac{22!\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{22!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 23\cdot 6\cdot 25 = 3450.$$

Событие *A – среди отобранных дежурных только юноши –* на схеме выделено цветом и наступает тогда и только тогда, когда из 10 юношей выберут трех, а из 15 девушек - ни одной. Согласно правилу произведения [1, стр. 25], для подсчета числа благоприятных исходов нужно перемножить число сочетаний из 10 по 3 и из 15 по 0:

$$m = C_{10}^{3}\cdot C_{15}^{0} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 1 = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120.$$

При подсчете применили свойство числа сочетаний, а именно $C_n^0 = 1$. Далее, согласно классическому определению вероятности, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{3450} \approx 0{,}035. \ \square$$

Пример 3.4. Студент приобрел пять лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету составляет 0,2. Найти вероятность того, что студент выиграет:

а) по трем лотерейным билетам;

б) не менее чем по трем билетам;

в) хотя бы по одному билету.

Определить наивероятнейшее число выигрышных билетов.

Решение. Испытание состоит в проверке билета на выигрыш. По условию число таких испытаний составляет $n = 5$. В каждом испытании наступает или не наступает событие A – *проверяемый билет содержит выигрыш*. Очевидно, что наступление события A в каждом предыдущем испытании не изменяет его вероятности в последующих и, следовательно, испытания являются независимыми. При этом, вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна $p = 0{,}2$, и, таким образом, вероятность того, что событие A не наступит, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. На основании *вышесказанного* можно сделать вывод о том, что мы имеем дело с повторными независимыми испытаниями, и при решении задачи можно использовать формулу Бернулли [1, стр. 50].

а) Пусть событие B – *студент выиграл по трем лотерейным билетам*. Следовательно, число испытаний, в которых ожидается наступление события A, равно $m = 3$. Искомую вероятность найдем по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_{3,5} = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512.$$

б) Пусть событие C – *студент выиграл не менее чем по трем лотерейным билетам*. Такому событию благоприятствуют три случая:

событие *A* наступает три, четыре или пять раз. Все эти события несовместны, поэтому, согласно теореме сложения вероятностей несовместных событий, вероятность суммы несовместных событий будет равна сумме вероятностей каждого события, включенного в сумму, т.е. имеем:

$$P(C) = P_{3,5} + P_{4,5} + P_{5,5} = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 =$$
$$= 10 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 + 5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2^5 = 0{,}05792 .$$

в) Пусть событие *D* – *студент выиграл хотя бы по одному лотерейному билету*. Выиграть хотя бы по одному билету означает выигрыш либо по одному, либо по двум, либо по трем, либо по четырем или, наконец, по пяти билетам, т.е. событие *D* представляет сумму всех этих несовместных событий. Поэтому, здесь также можно было бы воспользоваться теоремой сложения вероятностей несовместных событий. Но достаточно большое число слагаемых делает расчет весьма громоздким, и чтобы избежать этого, проще перейти к противоположному событию $\bar{D}$ – *все билеты без выигрышей*. Для такого события число испытаний, в которых ожидается наступление события *A*, равно $m = 0$. На основании формулы, связывающей вероятности противоположных событий, вероятность искомого события будет равна:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_{0,5} = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67232 .$$

Наиболее вероятное число успехов m_0 удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$np - q \le m_0 \le np + p .$$

Если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: $m_{0,1} = np - q$ и $m_{0,2} = np + p$. Если $np + p$ – не целое число, то наивероятнейшее число равно $m_0 = [np + p]$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа *x*.

В нашем случае наивероятнейшее число выигрышных билетов будет равно:

$$m_0 = [np + p] = [5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2] = [1{,}2] = 1 . \ \square$$

Пример 3.5. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 200 договоров с выплатой страховой суммы будет связано:

а) 20 договоров;

б) наивероятнейшее число договоров;

в) от 25 до 45 договоров включительно;

г) не более 40 договоров;

д) от 25 до 35 договоров.

Решение. Очевидно, что здесь имеют место повторные независимые испытания. Каждое испытание связано с наступлением или не наступлением страхового случая. Пусть событие A состоит в том, что страховой случай наступил. По условию задачи вероятность такого события равна $p = P(A) = 0{,}15$ и, соответственно, вероятность не наступления будет равна $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 1 - P(A) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. Так как число испытаний $n = 200$ достаточно велико, применять здесь формулу Бернулли нецелесообразно, и надо воспользоваться асимптотическими формулами. В частности, выполнены все условия применимости локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа [1, стр. 53], ибо число испытаний $n = 200$ достаточно велико и $npq = 200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 25{,}5 > 20$.

а) Согласно локальной теореме Муавра-Лапласа, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно m раз, приближенно определяется по формуле:

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f(x),$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

По условию задачи $m = 20$. Определяем соответствующее ему значение $x = \frac{20 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \approx -1{,}98$, а затем находим вероятность искомого события:

$$P_{20,200} \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \cdot f\left(-1{,}98\right) = \frac{1}{\sqrt{25{,}5}} \cdot f\left(1{,}98\right) = \frac{0{,}0562}{\sqrt{25{,}5}} \approx 0{,}0111.$$

При вычислении воспользовались таблицей значений функции Гаусса [1, Приложение I, стр. 198] и свойством четности функции Гаусса.

б) Сначала найдем наивероятнейшее число страховых случаев по формуле $m_0 = \left[np + p\right]$, согласно которой $m_0 = \left[200 \cdot 0{,}15 + 0{,}15\right] = 30$. Для этого значения находим:

$$x = \frac{30 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} = 0 \qquad \text{и}$$

$$P_{30,200} \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \cdot f\left(0\right) = \frac{0{,}3989}{\sqrt{25{,}5}} \approx 0{,}07899.$$

в) Согласно локальной теореме Муавра-Лапласа, вероятность того, что число m наступлений события A в n повторных независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе испытаний n приближенно равна

$$P_n\left(a \le m \le b\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right)\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, а $x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

Вычислим $P_{200}\left(25 \le m \le 45\right)$, предварительно определив аргументы функции Лапласа:

$$x_1 = \frac{25 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \approx -0{,}99 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{45 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \approx 2{,}97.$$

Далее

$$P_{200}\left(25 \le m \le 45\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(2{,}97\right) - \Phi\left(-0{,}99\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(2{,}97\right) + \Phi\left(0{,}99\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0{,}9970 + 0{,}6778\right) = 0{,}8374.$$

При вычислении воспользовались нечетностью функции Лапласа и таблицей значений функции Лапласа [1, Приложение II, стр. 199].

в) Необходимо найти $P_{200}\left(m \le 40\right)$. Так как число договоров не может быть отрицательным, то определение последней вероятности эквивалентно вычислению вероятности $P_{200}\left(0 \le m \le 40\right)$. Определив $x_1 = \dfrac{0 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \approx -5{,}94$ и $x_2 = \dfrac{40 - 200 \cdot 0{,}15}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} \approx 1{,}98$, получим:

$$P_{200}\left(0 \le m \le 40\right) \approx \frac{1}{2}\Big[\varPhi\left(1{,}98\right) - \varPhi\left(-5{,}94\right)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\varPhi\left(2{,}97\right) + \varPhi\left(5{,}94\right)\Big] \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(0{,}9523 + 1\right) = 0{,}97615.$$

При вычислении здесь воспользовались нечетностью функции Лапласа, таблицей значений функции Лапласа, а также тем, что если аргумент функции Лапласа больше четырех, то ее значение можно принимать равным единице.

д) Вероятность $P_{200}\left(25 \le m \le 35\right)$ можно было найти так же, как и в предыдущем случае, но проще это сделать, используя следствие 1 из интегральной теоремы Муавра-Лапласа [1, стр. 56], согласно которому при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что число m наступления события A отличается от произведения np не более чем на положительную величину ε, определяется соотношением:

$$P_n\left(\left|m - np\right| \le \varepsilon\right) \approx \varPhi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

Заметим, что границы промежутка 25 и 35 симметричны относительно значения $np = 200 \cdot 0{,}15 = 30$. Поэтому,

$$P_{200}\left(25 \le m \le 35\right) = P_{200}\left(\left|m - 30\right| \le 5\right) \approx \varPhi\left(\frac{5}{\sqrt{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}}\right) = \varPhi\left(0{,}99\right) = 0{,}6778. \square$$

Пример 3.6.* По статистическим данным известно, что в некоторой местности в среднем на каждые 100 семей приходится 30 автомобилей.

1. Найти вероятность того, что из 1000 семей доля имеющих автомобиль:

а) будет заключена в пределах от 0,28 до 0,33;

б) будет отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,02 (по абсолютной величине).

2. При каком числе семей можно утверждать с надежностью, не меньшей 0,9545, что доля семей, имеющих автомобиль, будет заключена в границах от 0,28 до 0,32?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что некоторая семья имеет автомобиль. На основании статистического определения вероятности, можно сказать, что вероятность такого события будет равна $p = P(A) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3.$

1. Так как число испытаний $n = 1000$ достаточно велико и условие $npq = 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 210 > 20$ выполнено, то здесь можно применить следствие 2 из интегральной теоремы Муавра-Лапласа [1, стр. 57], согласно которому при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что доля m/n появлений события A заключена в пределах от α до β (включительно) определяется соотношением:

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\right],$$

где $z_1 = \dfrac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}}$, $z_2 = \dfrac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}}$.

а) Необходимо найти $P_{1000}\left(0{,}28 \le \dfrac{m}{n} \le 0{,}33\right)$. Для этого вначале определим аргументы функции Лапласа:

$$z_1 = \frac{0{,}28 - 0{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{1000}}} = -1{,}38 \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{0{,}33 - 0{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{1000}}} = 2{,}07.$$

Тогда:

$$P_{1000}\left(0{,}28 \le \frac{m}{n} \le 0{,}33\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(2{,}07) - \Phi(-1{,}38)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(2{,}07) + \Phi(1{,}38)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}9616 + 0{,}8324) = 0{,}8970.$$

б) По следствию из интегральной теоремы Муавра-Лапласа для доли, согласно которому при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что доля m/n появлений события A отличается от ее вероятности p не более, чем на положительную величину $\delta > 0$ (по абсолютной величине), определяется соотношением:

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Таким, образом, найдем:

$$P_{1000}\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}3\right| \le 0{,}02\right) \approx \Phi\left(\frac{0{,}02}{\sqrt{\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{1000}}}\right) = \Phi(1{,}38) = 0{,}8324.$$

2. По условию

$$P_{1000}\left(0{,}28 \le \frac{m}{n} \le 0{,}32\right) \ge 0{,}9545 \quad \text{или} \quad P_{1000}\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}3\right| \le 0{,}02\right) \ge 0{,}9545.$$

Заменяя левую часть неравенства согласно следствию из интегральной теоремы Муавра-Лапласа для доли функцией Лапласа, приходим к следующему соотношению:

$$\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sqrt{\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}}}\right) \ge 0{,}9545.$$

Воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа, определяем ее аргумент, соответствующий значению функции, равному 0,9545. По таблице получаем, что аргумент равен 2, т.е.:

$$\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{n}}}\right)\geq\Phi(2).$$

Далее, используя свойство возрастания функции Лапласа, получим:

$$\frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{n}}}\geq 2.$$

Разрешая последнее соотношение относительно n, найдем, что:

$$\sqrt{n}\geq\frac{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7}}{0{,}01}\ \text{ или }\ n\geq\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{0{,}01^2}=2100.$$

Таким образом, число обследуемых семей должно быть не менее 2100, т.е. увеличено более чем в два раза. □

Пример 3.7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет:

а) на пяти веретенах;

б) хотя бы на двух веретенах.

Решение. В данном случае испытание состоит в проверке веретен на обрыв нити. По условию проводится достаточно большое число $n=1000$ испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A – обрыв нити на одном веретене – одна и та же и равна $p=P(A)=0{,}004$. Вероятность такого события достаточно мала и число $\lambda=np=1000\cdot 0{,}004=4<10$. Из сказанного выше вытекает, что выполнены все условия применимости формулы Пуассона [1, стр.52], согласно которой вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно определяется соотношением:

$$P_{m,n}\approx P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

а) Подставляя в последнее соотношение значения параметров $\lambda = 4$ и $m = 5$, найдем вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет только на пяти веретенах, равное $P_{5,1000} \approx \dfrac{4^5 e^{-4}}{5!}$. Числовое значение этой вероятности при указанных выше параметрах $\lambda = 4$ и $m = 5$ найдем по таблице значений функции Пуассона [1, Приложение III, стр. 200]:

$$P_{5,1000} \approx 0{,}1563.$$

б) Вероятность того, что обрыв произойдет хотя бы на двух веретенах, можно вычислить как сумму вероятностей большого числа несовместных событий:

$$P_{1000}(m \geq 2) = P_{2,1000} + P_{3,1000} + \ldots + P_{1000,1000}.$$

Однако, очевидно, что такого типа вероятности проще вычислять через вероятность противоположного события, состоящего в том, что обрыва нити либо не будет ($m = 0$), либо обрыв произойдет только на одном веретене ($m = 1$).

Используя формулу для вероятностей противоположных событий и теорему сложения вероятностей несовместных событий, получим:

$$P_{1000}(m \geq 2) = 1 - P_{1000}(m < 2) = 1 - \left(P_{1000}(m = 0) + P_{1000}(m = 1)\right) \approx$$
$$\approx 1 - \left(0{,}0183 + 0{,}0733\right) = 0{,}9084.$$

Замечание. Последнюю вероятность нельзя вычислить по интегральной теореме Муавра-Лапласа, так как не выполнено одно из условий ее применимости, а именно $npq = 1000 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996 = 3{,}984 < 20$.□

Пример 3.8. В экзаменационном билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7.

1. Составить закон распределения случайной величины – числа правильно решенных задач в билете. Построить полигон распределения.

2. Найти функцию распределения и построить ее график.

3. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение:

а) в промежутке $[1;\,3)$;

б) не менее чем 0,5;

в) в промежутке $[1{,}5;\,3]$.

4. Определить числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. 1. Рассмотрим случайную величину ξ – число правильно решенных задач в билете. Очевидно, что такая случайная величина может принимать следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3.

Для составления закона распределения вычислим соответствующие возможным значениям вероятности. Для этого введем следующие события. Пусть A_k – событие, состоящее в том, что студент правильно решит k-ую задачу $(k=1,2,3)$. Все эти три события являются независимыми в совокупности, вероятности которых по условию равны $P(A_1)=0{,}9$, $P(A_2)=0{,}8$ и $P(A_3)=0{,}7$. Соответственно, вероятности противоположных событий будут равны:

$$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}9=0{,}1,$$

$$P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2,$$

$$P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}7=0{,}3.$$

Представим вероятности событий, состоящих в том, что случайная величина ξ принимает свои возможные значения, через введенные события следующим образом:

Событие $(\xi=0)$ означает, что студент все три задачи решил неправильно. Такое событие равносильно совместному наступлению трех событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$, т.е. $(\xi=0)=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Учитывая независимость событий, получим:

$$P(\xi=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006.$$

Событие $(\xi=1)$ соответствует тому, что студент правильно решил только одну (неважно какую) из трех предложенных задач. Это означает, что он правильно решил либо только первую задачу, либо только вторую, либо только третью, т.е. это событие можно представить в виде суммы трех несовместных событий:

$$(\xi=1)=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3 .$$

На основании теоремы сложения несовместных событий и теоремы умножения независимых событий, найдем вероятность этого события:

$$P(\xi=1)=P\left(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P(A_2)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}3+0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}3+0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}7=0{,}092.$$

Аналогично вычисляем вероятность события $(\xi=2)$:

$$P(\xi=2)=P\left(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3\right)=P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)+P\left(A_1\bar{A}_2A_3\right)+P\left(\bar{A}_1A_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P\left(\bar{A}_3\right)+P(A_1)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot P(A_3)+P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}3+0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}7+0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}7=0{,}398.$$

И, наконец, вероятность события $(\xi=3)$ будет равна:

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}7=0{,}504.$$

Итак, запишем закон распределения в виде таблицы:

ξ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверим выполнение основного свойства закона распределения:

$$0{,}006+0{,}092+0{,}398+0{,}504=1.$$

Для построения полигона распределения вероятностей дискретной случайной величины, соответствующего полученному закону распределения, в прямоугольной системе координат *Oxp* отмечаем четыре точки с координатами (x_i, p_i) (рис. 3.2).

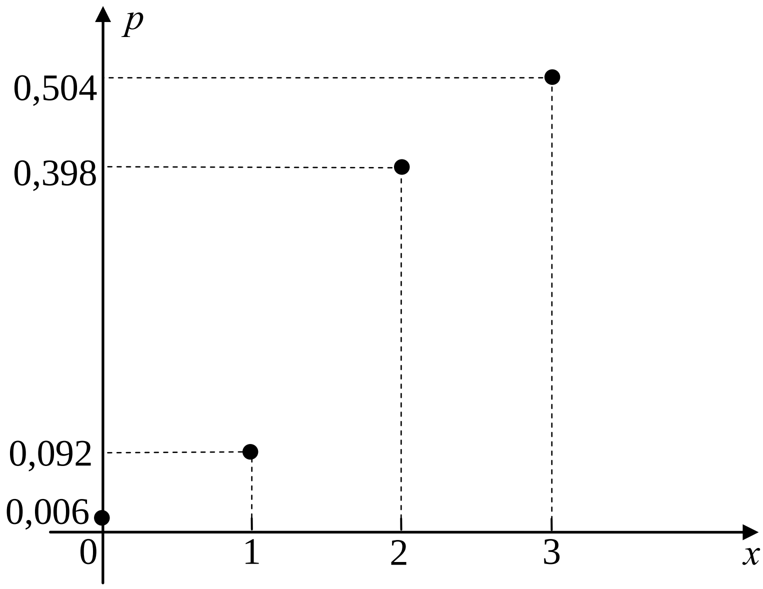


Рис. 3.2.

2. Построим функцию распределения. Из вида закона распределения дискретной случайной величины ξ вытекает, что ее четыре возможных значения разбивают числовую ось на пять промежутков (Рис. 3.3).

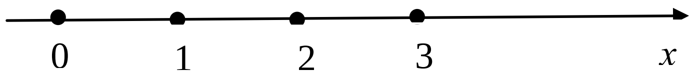


Рис. 3.3.

Найдем функцию распределения на каждом из них.

• Для любого *x*, принадлежащему промежутку $(-\infty, 0]$, по определению функции распределения следует, что

$$F(x) = P(\xi < x) = 0,$$

ибо событие $(\xi < x \le 0)$ является невозможным, так как строго левее произвольного числа *x* (даже для самого большого из рассматриваемого промежутка, равного нулю) нет ни одного возможного значения случайной величины ξ.

• Далее берем следующий промежуток. Если $0 < x \le 1$, то для таких значений аргумента *x* неравенству $\xi < x$ удовлетворяет только одно возможное значение $\xi = 0$. Следовательно, событие $(\xi < x)$ состоит в том, что случайная величина ξ принимает значение, равное нулю и, таким образом, справедливо соотношение

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) = 0{,}006.$$

• Если $1 < x \le 2$, то левее произвольного числа x из данного промежутка на числовой оси окажутся уже два возможных значений случайной величины ξ, равные 0 и 1. Поэтому событие $(\xi < x)$ наступает, если произойдет любое из событий: $(\xi = 0)$ или $(\xi = 1)$. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}006 + 0{,}092 = 0{,}098.$$

• При $2 < x \le 3$ неравенству $\xi < x$ удовлетворяют уже три возможных значения случайной величины ξ, равные 0, 1 и 2, поэтому:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 = 0{,}496.$$

• На последнем промежутке $x > 3$ все возможные значения случайной величины ξ, будут меньше любого x, и, таким образом, событие $(\xi < x)$ будет достоверным событием Ω. На основании этого, можно записать:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\Omega) = 1.$$

Итак, резюмируя все вышесказанное, функцию распределения запишем в следующем виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}006 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}098 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}496 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Функция распределения, соответствующая условиям рассмотренного примера, представляет собой кусочно-непрерывную функцию, а ее график имеет ступенчатый вид (рис. 3.4). Из вида функции распределения и ее графика видно, что функция распределения дискретной случайной величины в промежутках между ее возможными значениями не изменяется. В точках, отвечающих возможным значениям, данная функция имеет разрывы первого рода, совершая скачки, которые равны вероятностям соответствующих возможных значений.

3. а) Вероятность события $(1 \le \xi < 3)$ найдем на основании свойства функции распределения, заключающегося в том, что:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$$

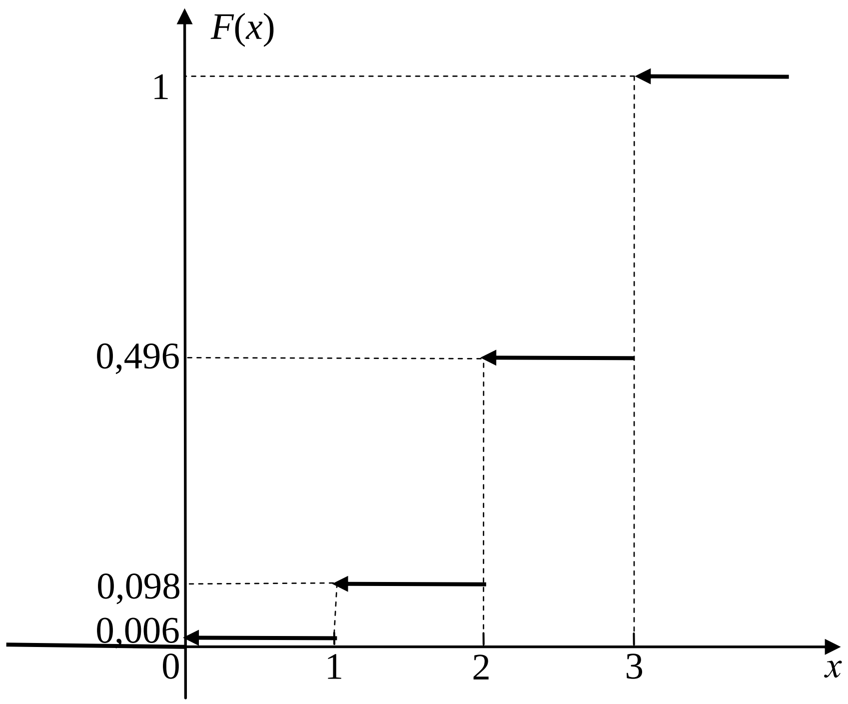


Рис. 3.4.

Следовательно, $P(1 \le \xi < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}496 - 0{,}006 = 0{,}49$.

Действительно, двойному неравенству $1 \le \xi < 3$ удовлетворяют только два возможных значения случайной величины: 1 и 2. Следовательно, событие $(1 \le \xi < 3)$ равносильно тому, что случайная величина ξ принимает возможные значения либо 1, либо 2, сумма вероятностей которых равна 0,49.

б) Так как $(\xi \ge x)$ и $(\xi < x)$ – противоположные события, то их вероятности связаны соотношением:

$$P(\xi \ge x) = 1 - P(\xi < x).$$

Далее, используя определение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$, получим:

$$P(\xi \ge 0{,}5) = 1 - P(\xi < 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

в) Обратим внимание на то, что для дискретной случайной величины непосредственно применить формулу, используемую в пункте а), к промежутку $1{,}5 \le \xi \le 3$ нельзя, ибо правая граница входит в данный промежуток. Поэтому, событие $(1{,}5 \le \xi \le 3)$ представим как сумму двух несовместных событий $(1{,}5 \le \xi < 3)$ и $(\xi = 3)$. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий и указанного выше свойства функции распределения, получим:

$$P(1{,}5 \le \xi \le 3) = P(1{,}5 \le \xi < 3) + P(\xi = 3) = F(3) - F(1{,}5) + P(\xi = 3) =$$
$$= 0{,}496 - 0{,}098 + 0{,}504 = 0{,}902.$$

4. Найдем числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Согласно определению математического ожидания дискретной случайной величины, получим:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся свойством дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi.$$

Таким образом, необходимо найти математическое ожидание квадрата случайной величины $M\xi^2$, которое определяем по формуле:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0{,}006 + 1^2 \cdot 0{,}092 + 2^2 \cdot 0{,}398 + 3^2 \cdot 0{,}504 = 6{,}22.$$

Тогда $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = 6{,}22 - 2{,}4^2 = 0{,}46$.

Среднее квадратическое отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии, т.е.:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}678. \;\square$$

Пример.3.9.* Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средний вес равен 300 г. Известно, что вес коробок с конфетами имеет нормальное распределение. При этом 5% коробок имеют вес, меньший 290 г. Записать функцию плотности распределения. Каков процент коробок, вес которых более 305 г?

Решение. Пусть случайная величина ξ – вес коробки конфет. По условию задачи случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Найдем параметры этого распределения. Математическое ожидание случайной величины – это средний вес коробки, т.е. $M\xi = 300$. Второй параметр распределения – среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ – найдем из условия, что 5% коробок с конфетами имеют вес, меньший 290 г. Последнее означает, что вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее 290, будет равна 0,05, т.е. $P(\xi < 290) = 0{,}05$.

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то ее функцию распределения можно представить через функцию Лапласа [1, стр. 105]:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Далее, используя определения функции распределения случайной величины и свойства нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, вероятность $P(\xi < 290)$ можно записать в виде:

$$P(\xi < 290) = F(290) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{290-300}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}05.$$

Разрешая последнее соотношение относительно функции Лапласа, получим:

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}9.$$

Используя таблицу значений функции Лапласа [1, Приложение II, стр. 200], найдем аргумент функции Лапласа:

$$\frac{10}{\sigma}=1{,}96\,.$$

Откуда, $\sigma=\dfrac{10}{1{,}96}\approx 5{,}1$.

Таким образом, функция плотности распределения данной случайной величины имеет следующий вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{5{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-300)^2}{2\cdot 5{,}1^2}}=\frac{1}{5{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-300)^2}{52{,}02}}\,.$$

Зная параметры распределения, можно найти вероятность того, что вес коробки конфет будет составлять более 305 г.:

$$P(\xi>305)=1-P(\xi\le 305)=1-F(305)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{305-300}{5{,}1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Phi(0{,}98)=0{,}5-0{,}5\cdot 0{,}6729=0{,}16355.\quad\square$$

Пример 3.10. Для исследования доходов работников предприятия, численность которого составляет 1600 человек, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 160 человек (10% выборка). Полученные данные приведены в таблице:

Доходы, тыс. руб.	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	$\sum$
Частоты	7	15	26	40	32	21	14	5	160

1) Найти вероятность того, что средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия отличается от среднего дохода, полученного по выборке, не более, чем на 1 тыс. руб. по абсолютной величине.

2) Найти границы, в которых с вероятностью 0,9876 заключена средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия.

3) Определить объем бесповторной выборки, чтобы с вероятностью 0,9876 средняя месячная заработанная плата, полученная по выборке, отличалась от генеральной средней не более, чем на 1 тыс. руб.

4) Найти вероятность того, что доля работников предприятия, месячная заработанная плата которых не превышает 20 тыс. руб., отличается от полученной по выборке доли не более, чем на 5% по абсолютной величине.

5) Найти границы, в которых с вероятностью 0,9545 заключена доля работников предприятия, средняя месячная заработанная плата которых не более 20 тыс. руб.

6) Определить такой объем бесповторной выборки, чтобы с вероятностью 0,9545 доля работников предприятия, средняя месячная заработанная плата которых не более 20 тыс. руб., отличалась от полученной по выборке не более, чем на 5% (по абсолютной величине).

Ответить на тот же вопрос, если о выборочной доле ничего неизвестно.

Решение. По формуле средней арифметической для интервального вариационного ряда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i ,$$

где x_i – варианты вариационного ряда, равные срединным значениям интервалов разбиения; n_i – соответствующие им частоты; m – число интервалов разбиения, получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{160}\left(7{,}5\cdot 7 + 12{,}5\cdot 15 + 17{,}5\cdot 26 + 22{,}5\cdot 40 + 27{,}5\cdot 32 + 32{,}5\cdot 21 + 37{,}5\cdot 14 + 42{,}5\cdot 5\right) = 24{,}34 .$$

Аналогично определяется среднее арифметическое квадратов вариант вариационного ряда:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i .$$

Получим:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{160}\left(7{,}5^2\cdot 7 + 12{,}5^2\cdot 15 + 17{,}5^2\cdot 26 + 22{,}5^2\cdot 40 + 27{,}5^2\cdot 32 + 32{,}5^2\cdot 21 + 37{,}5^2\cdot 14 + 42{,}5^2\cdot 5\right) = 662{,}81.$$

Следовательно, выборочная дисперсия будет равна:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 662{,}81 - 24{,}34^2 = 70{,}19 ,$$

а среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{70,19} = 8,38.$$

1) Вероятность того, что средняя месячная заработанная плата всех работников предприятия отличается от среднего дохода, полученного по выборке не более, чем на 1 тыс. руб. по абсолютной величине, представляет собой доверительную вероятность или надежность. Она определяется через среднюю квадратическую ошибку выборки. Средняя квадратическая ошибка при оценке генеральной средней для собственно-случайной бесповторной выборки достаточно большого объема находим по формуле:

$$\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

По условию имеем, что $N = 1600$, $n = 160$ и $\Delta = 1$. Подставляя в последнее соотношение числовое значение вычисленной ранее выборочной дисперсии, получим:

$$\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{70,19}{160}\left(1 - \frac{160}{1600}\right)} = 0,63.$$

Доверительная вероятность (надежность) при оценке генеральной средней для собственно случайной бесповторной выборки достаточно большого объема, определяется по формуле:

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{x} - x_0\right| \le \Delta\right\} = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma'_{\bar{x}}}\right).$$

Таким образом, искомая доверительная вероятность будет равна [1, Приложение II, стр.200]:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{1}{0,63}\right) = \Phi(1,59) = 0,8882.$$

2) Границы, в которых с вероятностью 0,9876 заключена средняя месячная заработанная плата всех работников данного предприятия, определяются предельной ошибкой выборки, которая возможна с заданной доверительной вероятностью.

Предельная ошибка бесповторной выборки находится как $\Delta = u \cdot \sigma'_{\bar{x}}$, где u- аргумент функции Лапласа, соответствующий доверительной вероятности γ, т.е. $\gamma = \Phi(u)$ и определяет точность полученных результатов.

Следовательно, оценка генеральной средней (доверительный интервал) будет удовлетворять следующему двойному неравенству:

$$\bar{x} - \Delta \le \bar{x}_0 \le \bar{x} + \Delta,$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя арифметическая.

Для заданной доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9876$ по таблице функции Лапласа находим, что значение ее аргумента будет равно $u = 2{,}5$. Следовательно, $\Delta = 2{,}5 \cdot 0{,}63 = 1{,}575$, и искомый доверительный интервал для генеральной средней будет иметь вид:

$$24{,}34 - 1{,}575 \le \bar{x}_0 \le 24{,}34 + 1{,}575 \quad \text{или} \quad 22{,}765 \le \bar{x}_0 \le 25{,}915.$$

3) Для определения объема повторной выборки, необходимого для того, чтобы гарантировать определенную точность оценки генеральной средней, задаваемую предельной ошибкой выборки Δ, при заданной надежности γ, используем формулу:

$$n \approx \frac{u^2 \cdot s^2}{\Delta^2}.$$

По условию задачи доверительная вероятность равна $\gamma = 0{,}9876$, что соответствует $u = 2{,}5$, а предельная ошибка равна $\Delta = 1$. Таким образом, объем повторной выборки приблизительно будет равен (округление производим всегда в большую сторону):

$$n \approx \frac{2{,}5^2 \cdot 70{,}19}{1^2} \approx 439.$$

Зная объем повторной выборки и объем генеральной совокупности, вычисляем объем бесповторной выборки по формуле:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{439 \cdot 1600}{439 + 1600} \approx 345.$$

4) На основании вариационного ряда, определим число объектов выборки, обладающих признаком: заработанная плата менее 20 тыс. руб. Этому признаку удовлетворяют варианты, принадлежащие первым трем интервалам. Следовательно, $m = 7 + 15 + 26 = 48$. Таким образом, выборочная доля будет составлять:

$$w = \frac{m}{n} = \frac{48}{160} = 0,3.$$

Полученный результат означает, что 30% опрошенных рабочих имеют заработанную плату менее 20 тыс. руб.

Вероятность того, что доля работников предприятия, месячная заработанная плата которых не превышает 20 тыс. руб., отличается от полученной по выборке доли не более, чем на 5% по абсолютной величине, определяется через среднюю квадратическую ошибку выборки.

Средняя квадратическая ошибка собственно-случайной бесповторной выборки при оценке генеральной доли, находится по формуле:

$$\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

где $w -$ выборочная доля.

Предельную ошибку выборки, равную 5%, представляем в виде доли. Она будет составлять $\Delta = 0,05$. Тогда средняя квадратическая ошибка бесповторной выборки будет равна:

$$\sigma'_w \approx \sqrt{\frac{0,3 \cdot (1-0,3)}{160} \cdot \left(1 - \frac{160}{1600}\right)} = 0,034.$$

Так же, как и при оценке генеральной средней, доверительную вероятность выборочной доли определим по формуле:

$$\gamma = P\left\{|w - p| \le \Delta\right\} = \varPhi\left(\frac{\Delta}{\sigma'_w}\right).$$

Следовательно, искомая доверительная вероятность будет равна:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{0,05}{0,034}\right) = \Phi(1,47) = 0,8584\,.$$

5) Учитывая, что $\gamma = \Phi(u) = 0,9545$, по таблице функции Лапласа найдем $u = 2$ и определим предельную ошибку бесповторной выборки для доли:

$$\Delta = u \cdot \sigma'_w = 2 \cdot 0,034 = 0,068\,.$$

Теперь искомый доверительный интервал для генеральной доли определяется соотношением:

$$0,3 - 0,068 \le p \le 0,3 + 0,068 \quad \text{или} \quad 0,233 \le p \le 0,368\,.$$

6) Объем повторной выборки при оценке генеральной доли определяется соотношением:

$$n \approx \frac{u^2 w(1-w)}{\Delta^2}\,.$$

В качестве выборочной доли возьмем состоятельную оценку $w = 0,3$, полученную ранее. Учитывая что $\Delta = 0,05$, $\gamma = \Phi(u) = 0,9545$ и $u = 2$, объем повторной выборки приблизительно будет равен:

$$n \approx \frac{2^2 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)}{0,05^2} = 336\,.$$

Имея объемы повторной выборки и генеральной совокупности, определяем объем бесповторной выборки по формуле:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{336 \cdot 1600}{336 + 1600} \approx 278\,.$$

Рассмотрим случай, когда никаких предварительных исследований не проводилось и о выборочной доле ничего неизвестно. В этом случае можно вычислить максимально возможный объем повторной выборки, соответствующий заданной доверительной вероятности и точности, по формуле:

$$n = \frac{u^2}{4 \cdot \Delta^2}\,.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$n = \frac{2^2}{4 \cdot 0{,}05^2} = 400,$$

и, соответственно, объем бесповторной выборки будет равен:

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{400 \cdot 1600}{400 + 1600} \approx 320.$$

Очевидно, что максимально возможное значение объема выборки оказалось значительно больше необходимого. □

Пример 3.11. Для выборки, приведенной в примере 3.10, на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что доходы работников предприятия распределены по нормальному закону.

Решение. Проверку гипотезы о виде закона распределения проведем, используя критерий согласия χ^2 –Пирсона [1, стр. 190]. Суть проверки гипотезы о том, что случайная величина распределена по нормальному закону, состоит в том, что сравниваются наблюдаемое значение статистики $\chi^2_{\text{набл.}}$ и критическое $\chi^2_{\text{кр.}}$.

Наблюдаемое значение статистики определяется по эмпирическим и теоретическим частотам по формуле:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n \cdot p_i\right)^2}{n \cdot p_i},$$

где n_i – эмпирические, а $n \cdot p_i$ – теоретические частоты.

Критическое значение статистики определяется в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $k = m - s - 1$, где m – число интервалов, а s – число неизвестных параметров распределения $F_\xi(x)$..

Так, для нормального закона распределения $s = 2$.

Для определения теоретических частот нам нужны параметры закона распределения, а именно - математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ. Точные значения этих параметров теоретического закона распределения нам неизвестны, поэтому заменим их наилучшими характеристиками, полученными по выборке.

В примере 3.10 были посчитаны выборочная средняя, выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x} = 24,34, \quad s^2 = 70,19, \quad s = 8,38.$$

Положим:

$$a = \overline{x} = 24,34, \quad \sigma = s = 8,38.$$

Теоретические вероятности попадания в рассматриваемые интервалы для нормального закона распределения выражаются через функцию Лапласа по формуле:

$$p_i = P(x_i \le \xi < x_{i+1}) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)\right).$$

Так, например, вероятность попадания в первый интервал будет равна:

$$p_1 = P(5 \le \xi < 10) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{10 - 24,34}{8,38}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 24,34}{8,38}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(-1,71) - \Phi(-2,67)\right) = \frac{1}{2}\left(-0,9127 + 0,9924\right) = 0,03985.$$

Значения функции Лапласа определяются по таблице. Для удобства все расчеты можно представить в виде таблицы 3.1.

x_i	x_{i+1}	n_i	$\frac{x_i - \overline{x}}{s}$	$\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{s}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)$	$\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{s}\right)$	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$
5	10	7	-2,31	-1,71	-0,9791	-0,9127	0,0332	5,312	0,536
10	15	15	-1,71	-1,11	-0,9127	-0,733	0,0899	14,376	0,027
15	20	26	-1,11	-0,52	-0,733	-0,3969	0,1681	26,888	0,029
20	25	40	-0,52	0,08	-0,3969	0,0638	0,2304	36,856	0,268
25	30	32	0,08	0,67	0,0638	0,4971	0,2167	34,664	0,205
30	35	21	0,67	1,27	0,4971	0,7959	0,1494	23,904	0,353
35	40	14	1,27	1,87	0,7959	0,9385	0,0713	11,408	0,589
40	45	5	1,87	2,46	0,9385	0,9861	0,0238	3,808[1]	0,373
$\sum$		160					0,9826	157,216	2,38= $\chi^2_{набл.}$

Табл. 3.1.

[1] В данном случае для упрощения задачи игнорируем тот факт, что теоретическая частота меньше 5 и не объединяем соседние интервалы.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $k = 8 - 2 - 1 = 5$ критическое значение статистики χ^2 - Пирсона определяется по таблице [1, Приложение IV, стр. 200]: $\chi^2_{кр.}(0{,}05;5) = 11{,}1$.

Таким образом, значение статистики $\chi^2_{набл.}$, вычисленное по выборке, не превосходит критического значения: 2,38 < 11,1, и это позволяет утверждать, что опытные данные на заданном уровне значимости не противоречат гипотезе о нормальном законе распределения, или опытные данные согласуются с выдвинутой гипотезой.□

Пример 3.12. Для выборки, приведенной в примере 3.10, на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что доходы работников предприятия распределены по равномерному закону распределения на отрезке [5; 45].

Решение. Плотность равномерного закона распределения на отрезке $[a, b]$ имеет вид [1, стр. 97]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На отрезке [5; 45] эта функция примет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0{,}025 & \text{при} \quad 5 \le x \le 45, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Все интервалы $[x_i, x_{i+1})$ имеют одну длину, равную 5, следовательно, все теоретические вероятности попадания в эти интервалы будут одинаковыми и равными $p_i = 5 \cdot 0{,}025 = 0{,}125$. Также будут одинаковы и соответствующие им теоретические частоты $np_i = 160 \cdot 0{,}125 = 20$. Дальнейшие расчеты представлены в таблице 3.2.

x_i	x_{i+1}	n_i	p_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$
5	10	7	0,125	20	8,45
10	15	15	0,125	20	1,25
15	20	26	0,125	20	1,8
20	25	40	0,125	20	20
25	30	32	0,125	20	7,2
30	35	21	0,125	20	0,05
35	40	14	0,125	20	1,8
40	45	5	0,125	20	11,25
$\sum$		160	1	160	51,8= $\chi^2_{набл.}$

Табл. 3.2.

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k = 8 - 1 - 1 = 6$ критическое значение статистики χ^2 –Пирсона определяется по таблице [1, Приложение IV, стр. 200]:

$$\chi^2_{кр.}(0,05;6) = 12,6.$$

Таким образом, значение статистики $\chi^2_{набл.}$, вычисленное по выборке, значительно превосходит критическое значение: 51,8 > 12,6, и это позволяет утверждать, что при заданном уровне значимости опытные данные противоречат гипотезе о равномерном законе распределения, или опытные данные не согласуются с выдвинутой гипотезой.□

Пример 3.13. Распределение 60 однотипных предприятий по стоимости производимой продукции (ξ, тыс.руб. за ед. продукции) и количеству реализованной продукции (η, тыс.ед.) представлено в таблице 3.3.

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

Стоимость ед. продукции, тыс. руб. (ξ)	*Середины интервалов*	*Количество реализованной продукции, тыс.ед.* (η)					n_i	*Групповая средняя,* $\bar{y}_j$
		20-30	30-40	40-50	50-60	60-70		
	y_j / x_i	25	35	45	55	65		
10-15	12,5			1	2	3	6	58,3
15-20	17,5			2	6	4	12	56,7
20-25	22,5		1	8	7	3	19	51,3
25-30	27,5	1	5	7	2		15	41,7
30-35	32,5	2	4	2			8	35,0
n_j		3	10	20	17	10	60	
Групповая средняя, $\bar{x}_i$		30,8	29,0	24,3	20,1	17,5		

Табл. 3.3.

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α= 0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η.

Решение. 1. Для каждого значения x_i вычислим групповые средние $\bar{y}_i$ по формулам:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}.$$

Имеем:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{6}(25\cdot 0 + 35\cdot 0 + 45\cdot 1 + 55\cdot 2 + 65\cdot 3) = 58{,}3;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{12}(25\cdot 0 + 35\cdot 0 + 45\cdot 2 + 55\cdot 6 + 65\cdot 4) = 56{,}7; \quad \dots .$$

Аналогично, для каждого значения y_j вычислим групповые средние $\bar{x}_j$ по формулам:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{l} x_i n_{ij}.$$

Имеем:

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{3}(12{,}5\cdot 0 + 17{,}5\cdot 0 + 22{,}5\cdot 0 + 27{,}5\cdot 1 + 32{,}5\cdot 2) = 30{,}8\,;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{10}(12{,}5\cdot 0 + 17{,}5\cdot 0 + 22{,}5\cdot 1 + 27{,}5\cdot 5 + 32{,}5\cdot 4) = 29{,}0\,; \quad \ldots.$$

В таблице 3.3 вычисленные значения групповых средних $\bar{x}_j$ приведены в последней строке, а $\bar{y}_i$ в последнем столбце.

2. а) Найдем выборочные уравнения регрессии. Уравнение регрессии η по ξ и ξ по η имеют вид:

$$y_x - \overline{y} = b_{\eta\zeta}(x - \overline{x}), \quad x_y - \overline{x} = b_{\xi\eta}(y - \overline{y}),$$

где

$b_{\xi\eta} = \dfrac{\mu}{s_\eta^2}$ и $b_{\eta\xi} = \dfrac{\mu}{s_\xi^2}$ – выборочные коэффициенты регрессии ξ по η и ξ по η, соответственно;

$s_\xi^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ и $s_\eta^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$ выборочные дисперсия переменных ξ по η, соответственно;

$\mu = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$ – выборочный корреляционный момент или выборочная ковариация.

Для вычисления всех коэффициентов найдем необходимые суммы:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_j \frac{1}{60}(12{,}5\cdot 6 + 17{,}5\cdot 12 + 22{,}5\cdot 19 + 27{,}5\cdot 15 + 32{,}5\cdot 8) = 23{,}1;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_j = \frac{1}{60}(25\cdot 3 + 35\cdot 10 + 45\cdot 20 + 55\cdot 17 + 65\cdot 10) = 48{,}5;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_i = \frac{1}{60}(12{,}5^2\cdot 6 + 17{,}5^2\cdot 12 + 22{,}5^2\cdot 19 + 27{,}5^2\cdot 15 + 32{,}5^2\cdot 8) = 567{,}1;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 n_j = \frac{1}{60}(25^2\cdot 3 + 35^2\cdot 10 + 45^2\cdot 20 + 55^2\cdot 17 + 65^2\cdot 10) = 2471{,}7;$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j n_{ij}=\frac{1}{60}[12,5\cdot(45\cdot 1+55\cdot 2+65\cdot 3)+17,5\cdot(45\cdot 2+$$
$$+55\cdot 6+65\cdot 4)+22,5\cdot(35\cdot 1+45\cdot 8+55\cdot 7+65\cdot 3)+27,5\cdot(25\cdot 1+$$
$$+35\cdot 5+45\cdot 7+55\cdot 2)+32,5\cdot(25\cdot 2+35\cdot 4+45\cdot 2)]=1075.$$

Таким образом, имеем:

$$\mu=1075-23,1\cdot 48,5=-44,54.$$

$$\overline{s}_{\xi}^{2}=567,1-23,1^2=34,24; \qquad \overline{s}_{\eta}^{2}=2471,7-48,5^2=119,42;$$

$$b_{\eta\xi}=\frac{-44,54}{34,24}=-1,30; \qquad b_{\xi\eta}=\frac{-44,54}{119,42}=-0,37.$$

Итак, уравнения регрессии имеют вид:

$y_x-48,5=-1,30\cdot(x-23,1)$ или $y_x=-1,30x+78,53;$

$x_y-23,1=-0,37\cdot(y-48,5)$ или $x_y=-0,37y+41,17.$

Построим графики полученных линий регрессии. Для построения прямых линий регрессии достаточно взять по две точки, удовлетворяющие каждому уравнению. Очевидно, что у них есть общая точка – точка пересечения $(\overline{x},\overline{y})$. В нашем случае это $(23,1; 48,5)$. В качестве второй точки для линии регрессии η по ξ возьмем, например, точку $(30; 39,53)$, а для ξ по η – точку $(30,07; 30)$. Таким образом, график эмпирических и теоретических линий регрессии будет иметь вид, представленный на Рис.3.6.

б) Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r=\pm\sqrt{b_{\eta\xi}b_{\xi\eta}}.$$

Знак «+» перед радикалом берется, если коэффициенты регрессии положительны, и знак «–», если коэффициенты регрессии отрицательные.

В нашем случае коэффициент корреляции будет равен:

$$r=-\sqrt{(-1,3)\cdot(-0,37)}=-\sqrt{0,48}=-0,69.$$

Поскольку коэффициент корреляции отрицательный, то наблюдается обратная связь. Так как коэффициент корреляции по абсолютной величине удовлетворяет соотношению $0,4<|r|<0,7$, то связь считается умеренной.

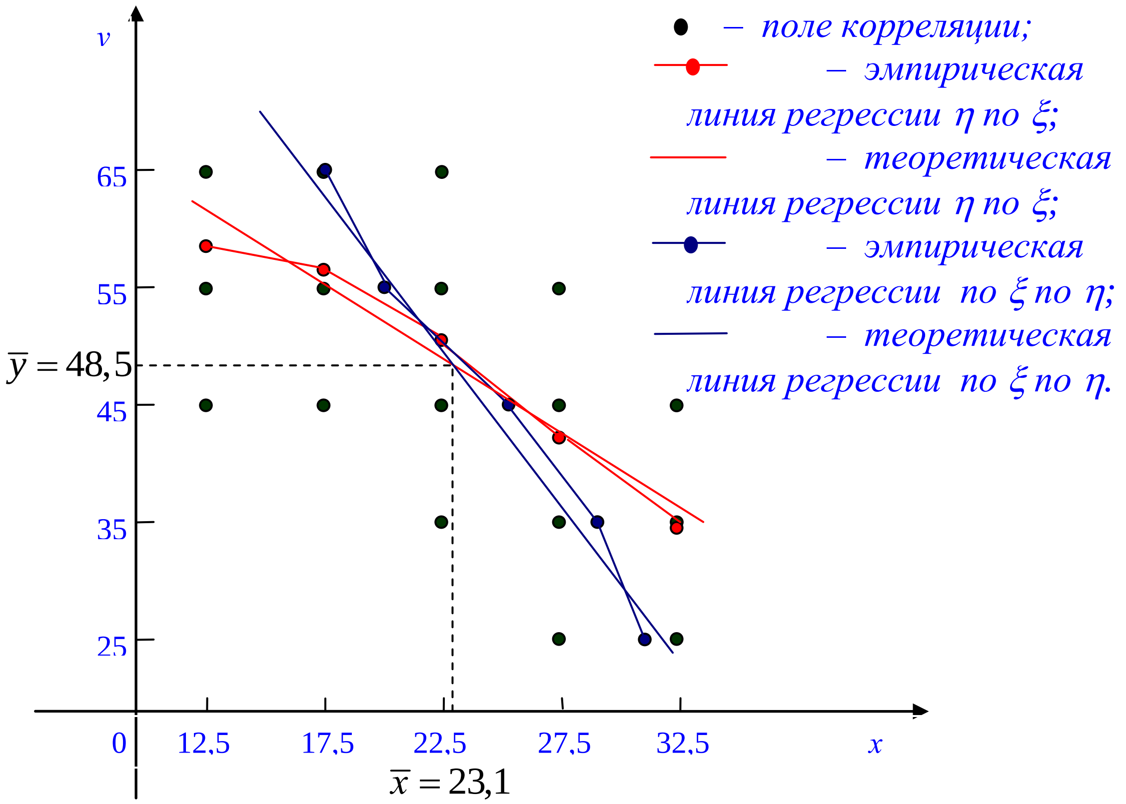


Рис. 3.6.

Проверим значимость коэффициента корреляции в рассматриваемом примере. Проверяется нулевая гипотеза H_0 об отсутствии линейной корреляционной связи между переменными в генеральной совокупности, т.е. коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю. При справедливости этой гипотезы статистика

$$t=\frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

имеет t-распределение Стьюдента с $k=n-2$ степенями свободы. Поэтому при заданном уровне значимости α гипотеза H_0 отвергается, т.е. выборочный коэффициент корреляции r значимо (существенно) отличается от нуля, если $t>t_{1-\alpha,k}$, где $t_{1-\alpha,k}$ – табличное значение t-распределения Стьюдента, определенное на уровне значимости α при числе степеней свободы $k = n - 2$.

Вычислим статистику критерия:

$$t = \frac{|-0{,}69|\sqrt{60-2}}{\sqrt{1-(-0{,}69)^2}} = 7{,}39.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = 60 - 2 = 58$ находим критическое значение статистики $t_{0,95;\,58} = 2{,}00$. Поскольку вычисленная статистика больше своего критического значения ($t > t_{0,95;\,58}$), гипотеза H_0 отвергается, т.е. принимается альтернативная гипотеза о том, что коэффициент корреляции между стоимостью произведенной продукции и количеством ее реализации при заданном уровне значимости значимо отличается от нуля.

4. Варианты контрольной работы

ВАРИАНТ 1

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 1)

Контрольная работа № 1

1. Ребенок играет с карточками, на каждой из которых написана одна из букв: *С*, *Х*, *Р*, *А*, *А*, *А*. Определить вероятность того, что мы сможем прочесть слово «*САХАРА*» при случайном расположении им карточек в ряд.

2. С целью привлечения покупателей компания «Кока-кола» проводит конкурс, согласно которому каждая десятая бутылка напитка, выпущенная фирмой, является призовой.

Составить закон распределения числа призовых из четырех приобретенных покупателем бутылок.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить функцию распределения.

3. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ξ, если известно, что $P(\xi < 1) = 0{,}1$ и $P(\xi \geq 5) = 0{,}5$.

Построить кривую распределения этой случайной величины и найти ее максимум.

4. В районном отделении Сбербанка хранят вклады 80% работающих на заводе. Какова вероятность того, что из 900 наудачу выбранных работников завода в этом отделении Сбербанка хранят вклады:

а) от 600 до 700 человек;

б) 750 человек?

5. Сумма вклада клиента сберегательного банка – это случайная величина с математическим ожиданием 15 тыс. руб. и дисперсией 0,4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что сумма вклада наудачу взятого вкладчика будет заключена в границах от 14 тыс. руб. до 16 тыс. руб.

Контрольная работа № 2

1. С целью определения средней продолжительности обслуживания клиентов в пенсионном фонде, число клиентов которого очень велико, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено обследование 100 клиентов. Результаты обследования представлены в таблице:

Время обслуживания, мин.	Менее 2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	Более 12	Итого
Число клиентов	6	10	21	39	15	6	3	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9946 заключено среднее время обслуживания всех клиентов пенсионного фонда;

б) вероятность того, что доля всех клиентов фонда с продолжительностью обслуживания менее 6 минут отличается от доли таких клиентов в выборке не более чем на 10% (по абсолютной величине);

в) объем повторной выборки, при котором с вероятностью 0,9907 можно утверждать, что доля всех клиентов фонда с продолжительностью обслуживания менее 6 минут отличается от доли таких клиентов в выборке не более чем на 10% (по абсолютной величине).

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – время обслуживания клиентов – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 предприятий пищевой промышленности по степени автоматизации производства ξ (%) и росту производительности труда η (%) представлено в таблице:

ξ \ η	5–9	9–13	13–17	17–21	21–25	Итого
15–21	3	2	1			6
21–27	1	2	3	2		8
27–33		2	7	3		12
33–39		2	5	8		15
39–45			2	2	1	5
45–51				2	2	4
Итого	4	8	18	17	3	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить рост производительности труда при степени автоматизации производства 43 %.

ВАРИАНТ 2

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 2)

Контрольная работа № 1

1. Прибор выходит из строя, если выходит из строя любой из трех его узлов, работающих независимо. Вероятности выхода из строя в течение года соответственно узлов равны 0,3; 0,2; 0,25. Найти вероятность того, что прибор в течение года не выйдет из строя.

2. Среди 7 купленных театральных билетов 3 билета в партер. Наудачу взяли 4 билета.

Составить закон распределения случайной величины, равной числу билетов в партер среди взятых.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить функцию распределения.

3. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$\varphi(x)=\begin{cases} C, & \text{если} \quad 0<x\le 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти значение константы *С*, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Вычислить вероятность попадания в интервал $[2;5]$.

На чертеже изобразить график функции плотности вероятности и объяснить геометрический смысл найденной вероятности.

4. Каждый из пяти лифтов в высотном доме в течение месяца работает нормально с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в течение месяца будут работать нормально:

а) 3 лифта; б) более 3 лифтов.

5. Средняя температура воздуха в июле в данной местности 20ºС. Используя лемму Чебышева, оценить вероятность того, что в июле следующего года средняя температура воздуха будет:

а) не более 15ºС; б) более 20ºС.

Контрольная работа № 2

1. Из 1560 сотрудников предприятия по схеме собственно случайной бесповторной выборки отобрано 100 человек для получения статистических данных о пребывании на больничном листе в течение года. Полученные данные представлены в таблице:

Количество дней пребывания на больничном листе	Менее 3	3–5	5–7	7–9	9–11	Более 11	Итого
Число сотрудников	6	13	24	39	8	10	100

Найти:

а) вероятность того, что среднее число дней пребывания на больничном листе среди сотрудников предприятия отличается от их среднего числа в выборке не более чем на 1 день (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля всех сотрудников, пребывающих на больничном листе не более 7 дней;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли, (см. п. б)), можно гарантировать с вероятностью 0,98.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – число дней пребывания сотрудников предприятия на больничном листе – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 110 образцов полимерных композиционных материалов по содержанию в них нефтешламов ξ (%) и водопоглощению η (%) представлено в таблице:

ξ \ η	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	Итого
5–15	17	4					21
15–25	3	18	3				24
25–35		2	15	5			22
35–45			3	13	7		23
45–55					6	14	20
Итого	20	24	21	18	13	14	110

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать содержательную интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний процент водопоглощения в образцах, содержащих 35 % нефтешламов.

ВАРИАНТ 3

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 3)

Контрольная работа № 1

1. Среди 20 электролампочек 3 нестандартные. Одновременно берут 3 лампочки. Найти вероятность того, что не менее двух лампочек будут стандартными.

2. В цепи из четырех последовательно соединенных элементов произошло замыкание. Матер проверяет элементы последовательно, пока не обнаружит замыкание (проверенный элемент повторно не проверяется)

Составить закон распределения числа проверенных мастером элементов.

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения данной случайной величины.

3. Случайная величина ξ имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2.

Найти:

а) параметр σ^2, если известно, что математическое ожидание $M\xi = 5$ и вероятность $P(2 < \xi < 8) = 0{,}9973$;

б) вероятность $P(\xi < 0)$.

4. Вероятность выпуска бракованной микросхемы равна 0,002. Какова вероятность того, что из 2000 присланных в магазин микросхем окажется не менее 3 бракованных?

5. Дневная выручка магазина является случайной величиной со средним значением 10000 руб. и средним квадратическим отклонением 2000 руб. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что дневная выручка будет находиться в пределах от 6000 до 14000 руб.

Контрольная работа № 2

1. В некотором городе по схеме собственно случайной бесповторной выборки было обследовано 80 магазинов розничной торговли из 2500 с целью изучения объема розничного товарооборота. Получены следующие данные:

Товарооборот, у.е.	Менее 60	60–70	70–80	80–90	90–100	Более 100	Итого
Число магазинов	12	19	23	18	5	3	80

Найти:

а) вероятность того, что средний объем розничного товарооборота во всех магазинах города отличается от среднего объема розничного товарооборота, полученного в выборке, не более чем на 4 у.е. (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,98 заключена доля магазинов, с объемом розничного товарооборота от 60 до 90 у.е.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего объема розничного товарооборота (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,95.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – объем розничного товарооборота – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Имеются следующие выборочные данные о рыночной стоимости квартир η (тыс.у.е.) и их общей площади ξ (кв.м) :

ξ \ η	13–18	18–23	23–28	28–33	33–38	Итого
33–49	4	2	1			7
49–65	2	6	4	1		13
65–81	1	4	9	4	1	19
81–97			3	6	3	12
97–113			1	3	5	9
Итого	7	12	18	14	9	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить стоимость квартиры общей площадью 75 кв.м.

ВАРИАНТ 4

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 4)

Контрольная работа № 1

1. Охотник может произвести по летящей дичи один за другим три выстрела с вероятностями попадания соответственно 0,8; 0,6 и 0,4. Стрельба прекращается после попадания в цель. Найти вероятность того, что охотник: а) попадет в дичь при третьем выстреле; б) произведет все три выстрела.

2. В партии из 8 деталей 6 деталей – стандартные. Наугад отбираются две детали.

Составить закон распределения случайной величины, равной числу стандартных деталей среди отобранных.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

3. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \frac{1}{3} & \text{при} \quad 1\le x\le a,\\ 0 & \text{при} \quad x>a.\end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной a;

б) $M\xi$ и $\sigma(\xi)$;

в) вероятность $P(0<\xi<2)$;

г) функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

4. При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено 4 новые электролампочки. Каждая электролампочка в течение года может перегореть с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в течение года из числа включенных в начале года придется заменить новыми: а) не менее 3 ламп; б) не более 3 ламп.

5. Уровень воды в реке – это случайная величина со средним значением 2,5 м и стандартным отклонением 20 см. Оценить вероятность того, что в наудачу выбранный день:

а) уровень превысит 3 м; б) окажется в пределах от 2,2 м до 2,8 м.

Контрольная работа № 2

1. В результате выборочного обследования российских автомобилей, обслуживающихся в автосервисе по гарантии, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки из 280 автомобилей были отобраны 60. Полученные данные о пробеге автомобилей с момента покупки до первого гарантийного ремонта представлены в таблице:

Пробег, тыс.км	Менее 1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	Более 6	Итого
Число автомобилей	3	5	9	16	13	8	6	60

Найти:

а) вероятность того, что средний пробег всех автомобилей отличается от среднего пробега автомобилей в выборке не более, чем на 400 км (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля автомобилей, пробег которых составляет менее 3 тыс. км.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли (см. п. б)), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – средний пробег автомобиля до гарантийного ремонта – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 60 банков по величине процентной ставки ξ (%) и размеру выданных кредитов η (млн.руб.) представлено в таблице:

ξ \ η	2–5	5–8	8–11	11–14	14–17	Итого
11–13				1	6	7
13–15			4	7	3	14
15–17		1	11	5	1	18
17–19	4	5	2			11
19–21	8	2				10
Итого	12	8	17	13	10	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить средний размер выданного банком кредита, процентная ставка которого равна 16%.

ВАРИАНТ 5

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 5)

Контрольная работа № 1

1. Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10. Какова вероятность того, что из наудачу взятых 3 отрезков можно построить треугольник?

2. Вероятность наличия нужной книги для первой библиотеки равна 0,2; для второй, третьей и четвертой соответственно 0,2, 0,4 и 0,5.

Составить закон распределения числа библиотек, которые последовательно посещает студент в поисках нужной книги.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить функцию распределения.

3. Случайная величина ξ нормально распределена. Известно, что $M\xi = -2,\ D\xi = 1$.

Найти:

а) параметры a и σ^2 закона распределения;

б) плотность вероятности случайной величины ξ и ее значения в точках $x = -1,\ x = 0,\ x = 2$;

в) вероятности $P(-2 < \xi < 0)$ и $P(\xi > 1)$.

4. В среднем 15% поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что из 100 автомобилей имеют некомплектность:

а) 10 автомобилей;

б) не более 10 автомобилей.

5. Суточное потребление электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной с математическим ожиданием 2000 кВт/ч и дисперсией 20000. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в ближайший день расход электроэнергии в населенном пункте будет от 1500 до 2500 кВт/ч.

Контрольная работа № 2

1. В филиале заочного вуза обучается 2000 студентов. Для изучения стажа работы студентов по специальности по схеме собственно случайной бесповторной выборки отобрано 100 студентов. Полученные данные о стаже работы студентов по специальности представлены в таблице:

Стаж работы по специальности, лет	Менее 2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	Более 12	Итого
Количество студентов	10	19	24	27	12	5	3	100

Найти:

а) вероятность того, что доля всех студентов филиала, имеющих стаж работы менее 6 лет, отличается от выборочной доли таких студентов не более чем на 5% (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,997 заключен средний стаж работы по специальности всех студентов филиала;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего стажа работы по специальности (см. п. б)) можно гарантировать с вероятностью 0,9898.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – стаж работы студентов по специальности – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 100 предприятий по количеству работников η (чел.) и средней месячной надбавки к зарплате ξ (%) представлено в таблице:

ξ \ η	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Итого
7,5–12,5				6	4	10
12,5–17,5			6	6	2	14
17,5–22,5			10	2		12
22,5–27,5	3	6	8	2		19
27,5–32,5	4	11	10			25
32,5–37,5	10	6	4			20
Итого	17	23	38	16	6	100

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить среднюю месячную надбавку к зарплате при числе работников предприятия 46 человек.

ВАРИАНТ 6

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 6)

Контрольная работа № 1

1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточка *Л*, на трех остальных *И*. Выкладываем наудачу эти карточки подряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «*ЛИЛИИ*»?

2. Ткачиха обслуживает 3 станка. Вероятности того, что в течение часа станок не потребует внимания, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7.

Составить закон распределения для числа станков, потребовавших внимания в течение часа.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить функцию распределения.

3. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 1 \le x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Найти: а) параметр b;

б) математическое ожидание и дисперсию ξ;

в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

4. В среднем левши составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдется: а) ровно 4 левши; б) не менее чем 4 левши.

5. Среднее значение длины детали равно 50 см. Пользуясь леммой Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине:

а) более 49,5 см; б) не более 50,5 см.

Контрольная работа № 2

1. Имеются выборочные данные о распределении вкладчиков по размеру вклада в Сбербанке города:

Размер вклада, тыс. руб.	До 40	40–60	60–80	80–100	Свыше 100	Итого
Число вкладов	32	56	92	120	100	400

Найти:

а) вероятность того, что средний размер вклада в Сбербанке отличается от среднего размера вклада в выборке не более чем на 5 тыс. руб. (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,95 заключена доля вкладов, размер которых менее 60 тыс. руб.;

в) объем повторной выборки, при которой те же границы для доли вкладов (см. п. б)) можно гарантировать с вероятностью 0,9876; дать ответ на тот же вопрос, если никаких предварительных данных о рассматриваемой доле нет.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – размер вклада в Сбербанке – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 предприятий по стоимости основных производственных фондов ξ (млн.руб.) и стоимости произведенной продукции η (млн.руб.) представлены в таблице:

ξ \ η	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	Итого
5–15	17	4					21
15–25	3	18	3				24
25–35		2	15	5			22
35–45			3	13	7		23
45–55					6	14	20
Итого	20	24	21	18	13	14	110

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить среднюю стоимость произведенной продукции, при стоимости основных производственных фондов 45 млн. руб.

ВАРИАНТ 7

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 7)

Контрольная работа № 1

1. Три стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6; 0,7 для второго и 0,5 для третьего. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

2. Молодого человека пригласили на день рождения. Он помнил номер дома, но забыл номер квартиры, помня лишь, что номер однозначный и нечетный.

Составить закон распределения числа посещенных квартир для отыскания нужной.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить функцию распределения.

3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 2$, $\sigma^2 = 4$.

Найти:

а) плотность вероятности $\varphi(x)$;

б) вероятности $P(1 < \xi < 4)$ и $P(\xi < 3)$;

в) математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

4. Вероятность преждевременного перегорания электролампы равна 0,1. Какова вероятность того, что из 9 ламп хотя бы одна перегорит преждевременно?

5. Вероятность того, что страховой договор завершится выплатой страховой суммы, оценивается как 0,15. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что из 1000 страховых договоров число завершившихся выплатой отклонится от среднего числа таких договоров не более чем на 25 (по абсолютной величине).

Контрольная работа № 2

1. В результате выборочного обследования 100 предприятий региона из 500 по схеме собственно случайной бесповторной выборки получено следующее распределение снижения затрат на производство продукции в процентах к предыдущему году:

Процент снижения затрат (%)	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	Итого
Число предприятий	6	20	31	24	13	6	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,907 будет находиться средний процент снижения затрат на всех 500 предприятиях;

б) вероятность того, что доля всех предприятий, затраты которых снижены не менее, чем на 10%, отличается от доли таких предприятий в выборке не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего процента сниженные затрат (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – процент снижения затрат – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 60 предприятий по объему инвестиций в развитие производства ξ (млн.руб.) и получаемой за год прибыли η (млн.руб.) представлены в таблице:

ξ \ η	0–0,8	0,8–1,6	1,6–2,4	2,4–3,2	3,2–4,0	Итого
2–4	2	2				4
4–6	2	7	10			19
6–8		2	17	7		26
8–10			4	3	2	9
10–12					2	2
Итого	4	11	31	10	4	60

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить полученную прибыль при объеме инвестиций 5 млн. руб.

ВАРИАНТ 8

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 8)

Контрольная работа № 1

1. Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два по пять рублей. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что:

а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость;

б) все три билета стоят семь рублей.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов 0,3; 0,64; 0,5.

Составить закон распределения числа отказавших приборов.

Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

3. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & \text{при } 2 \le x \le 7; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Необходимо:

а) найти параметр a;

б) вычислить математическое ожидание;

в) найти вероятность $P(1 \le \xi \le 5)$;

г) построить графики функции распределения и плотности вероятности случайной величины ξ.

4. В среднем 85% саженцев яблони приживается. Найти вероятность того, что из посаженных 200 саженцев яблонь приживется:

а) 170 яблонь; б) не менее 180 яблонь.

5. Вероятность того, что посетитель магазина купит рекламируемый товар, равна 0,65. Оценить с помощью леммы Чебышева вероятность того, что из 1000 покупателей приобретут этот товар:

а) более 600; б) не более 700.

Контрольная работа № 2

1. С целью изучения дневной выборки ткани (м) ткачихами комбината по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 100 ткачих из 2000. Результаты обследования представлены в таблице:

Дневная выработка, м	Менее 55	55–65	65–75	75–85	85–95	95–105	Более 105	Итого
Число ткачих	8	7	15	35	20	8	7	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9883 заключена средняя дневная выработка всех ткачих комбината;

б) вероятность того, что доля ткачих комбината вырабатывающих в день не менее 85 м. ткани, отличается от доли таких ткачих в выборке не более, чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для средней дневной выработки (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,9942.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – дневная выработка ткани – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 однотипных предприятий по основным фондам ξ (млн.руб.) и себестоимости выпуска единицы продукции η (млн.руб.) представлены в таблице:

ξ \ η	1	2	3	4	5	Итого
30–80			1	2	3	6
80–130			1	4	3	8
130–180		4	8	3	1	16
180–230	2	5	4			11
230–280	3	4	2			9
Итого	5	13	16	9	7	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, определить себестоимость выпускаемой продукции на предприятии с основными фондами 270 млн. руб.

ВАРИАНТ 9

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 9)

Контрольная работа № 1

1. На полке стоят одинаковые по внешнему виду книги: 2 по математике и 3 по физике. Студент последовательно просматривает книги до тех пор, пока не найдет книгу по математике. Какова вероятность того, что ему придется просмотреть 4 книги?

2. Фирма имеет 4 грузовых автомобиля. Вероятность выхода на линию каждого автомобиля равна 0,8.

Составить закон распределения случайной величины, равной числу автомобилей, которые выйдут на линию в произвольно выбранный день.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 2$, $\sigma^2 = 4$. Случайная величина η также имеет нормальное распределение, причем $M\eta = 1$, $D\eta = 4$.

Найти:

а) плотности вероятностей случайных величин ξ и η, изобразить их схематично на одном графике;

б) вероятности $P(-2 < \xi < 0)$ и $P(\xi > 1)$,

в) $M(\xi + 2\eta)$ и $D(3\xi - \eta)$.

4. Телефонный коммутатор обслуживает 1000 абонентов. Для каждого абонента вероятность позвонить в течение часа равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение часа позвонят не менее пяти абонентов.

5. Вероятность допустить ошибку при наборе перфокарты равна 0,002. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что среди 10000 набитых перфокарт с ошибками будет от 5 до 35 (включительно).

Контрольная работа № 2

1. Для планирования бюджета предприятия на следующий год было проведено выборочное обследование использования амортизационного фонда. По схеме собственно- случайной бесповторной выборки из 500 выплат были отобраны 100 и получены следующие данные:

Величина выплаты (руб.)	Менее 1000	1000–2000	2000–3000	3000–4000	4000–5000	5000–6000	Итого
Число выплат	3	13	33	26	17	8	100

Найти:

а) вероятность того, что средняя выплата отличается от средней выплаты в выборке не более чем на 100 руб.;

б) границы, в которых с вероятностью 0,9281 заключена доля выплат, величина которых не превосходит 4000 руб.;

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для доли (см. п. б)) можно гарантировать с вероятностью 0,9545.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – величина выплат – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 50 городов по численности населения ξ (тыс. чел.) и среднемесячному доходу на одного человека η (тыс. руб.) представлено в таблице:

ξ \ η	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	Более 8	Итого
30–50	1	1	3				5
50–70		2	5	1			8
70–90		1	1	6	2	2	12
90–110			4	9			13
110–130			2	2	5		9
Более 130					2	1	3
Итого:	1	4	15	18	9	3	50

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний доход на одного человека в городе с населением 100 тыс. человек.

ВАРИАНТ 10

(для студентов, номера личных дел которых оканчиваются цифрой 0)

Контрольная работа № 1

1. Брошены два кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет не менее 10.

2. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее при первом выстреле равна 0,8, а для каждого последующего выстрела уменьшается на 0,1.

Составить закон распределения случайной величины, равной числу попаданий в цель.

Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a & \textit{при} \quad 0<x<5, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти: а) параметр a;

б) математическое ожидание и дисперсию;

в) $P(0<\xi<3)$.

4. Вероятность того, что каждый из саженцев сосны приживется, равна 0,8. Лесхоз посадил 1600 саженцев сосны. Найти вероятность того, что из 1600 саженцев число прижившихся будет в границах от 1250 до 1310 (включительно).

5. Средний простой рабочего в течение смены составляет 20 мин. Используя лемму Чебышева, оценить вероятность того, что в данный день простой рабочего за смену:

а) не превзойдет 1 час; б) окажется более 45 мин.

Контрольная работа № 2

1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование строительных организаций региона по объему выполненных работ (млн. руб.). Результаты представлены в таблице:

Объем работ (млн. руб.)	Менее 56	56–60	60–64	64–68	68–72	Более 72	Итого
Число организаций	9	11	19	30	18	13	100

Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен средний объем выполненных работ всех строительных организации региона;

б) вероятность того, что доля всех строительных организаций, объем работ которых не менее 60 млн. руб., отличается от доли таких организаций в выборке не более, чем на 0,05 (по абсолютной величине);

в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего объема выполненных работ, (см. п. а)), можно гарантировать с вероятностью 0,9876.

2. По данным задачи 1, используя χ^2-критерий Пирсона, на уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ – объем выполненных работ – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

3. Распределение 100 средних фермерских хозяйств по числу наемных рабочих ξ (чел.) и их среднемесячной заработной плате на 1 человека η (тыс. руб.) представлено в таблице:

ξ \ η	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Свыше 60	Итого
102						10	10
103					6	15	21
104			10	11	8		29
105			8	3			11
106		5	6				11
107	5	9	4				13
Итого:	5	14	28	14	14	25	100

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными ξ и η существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости α=0,05 оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными ξ и η;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить среднемесячную заработную плату одного рабочего в хозяйстве, в котором работают 10 наемных рабочих.

5. Методические указания по выполнению контрольной работы №1 с частичным использованием КОПР

Компьютерная обучающая программа (КОПР) – это одна из форм организации самостоятельной работы студентов, которую студент может выполнить вне института, например, дома или на работе, используя сеть Интернет.

Контрольная работа №1 с частичным использованием КОПР состоит из двух частей. В первой части необходимо выполнить задания в традиционной форме по вариантам, приведенным в предыдущем разделе данного учебно-методического пособия, а во второй части необходимо проработать три выделенные темы контрольной работы по компьютерной обучающей программе и выполнить дополнительно индивидуальный вариант из пяти контрольных заданий по этим темам.

По итогам работы с КОПР составляется протокол, отражающий данные об изучении выделенных тем и выполнении самостоятельных и контрольных заданий (см. ниже), который вместе с выполненной первой частью контрольной работы сдается на проверку преподавателю. Защита контрольной работы (собеседование по ней) проводится с учетом результатов выполнения контрольной работы и представленного протокола работы с КОПР.

5.1. Содержание контрольной работы № 1 с частичным использованием КОПР

В контрольной работе № 1 по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» с частичным использованием КОПР для проработки с помощью компьютерной обучающей программы выделены три темы «Основные теоремы», «Законы распределения» и «Непрерывные случайные величины. Нормальный закон распределения». По первым двум темам после их проработки необходимо выполнить по два контрольных задания, а по третьей теме – одно задание.

Ниже приведен пример варианта контрольных заданий к работе.

5.1. В районе имеется двенадцать заводов, из которых три нерентабельных. На проверку случайным образом отобрано два завода. Найти вероятность того, что среди них:

а) один нерентабельный; б) хотя бы один рентабельный.

5.2. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Приобретенное изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно поставлено второй фирмой.

5.3. Три баскетболиста один за другим бросают мяч в корзину. Вероятности попадания для первого, второго и третьего баскетболистов равны соответственно 0,7, 0,8, и 0,9. Составить закон распределения числа попаданий.

5.4. В урне имеются 3 белых и 3 синих шара. Одновременно вынимаются три шара. Составить закон распределения случайной величины ξ, которая равна числу синих шаров среди вынутых.

5.5. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \dfrac{1}{36}x^2, & \text{если } 0 < x \le 6, \\ 1, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание $M(\xi)$;

б) дисперсию $D(\xi)$;

в) $P(0,6 < \xi < 7)$.

5.2. Работа с КОПР

При работе с КОПР необходимо ознакомиться с кратким обзором теоретического материала по теме, проработать в режиме диалога примеры, ответить на вопросы для самоконтроля и выполнить контрольные задания.

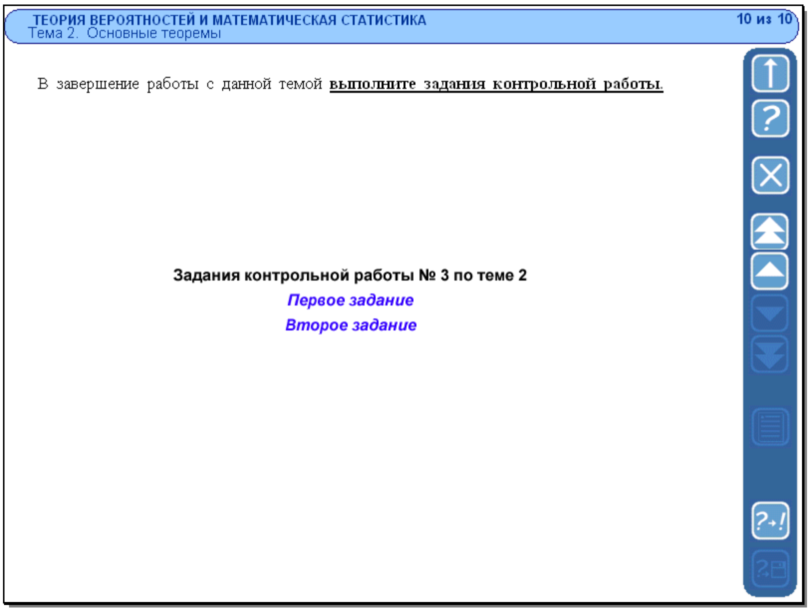


Рис. 5.1. Расположение заданий контрольной работы по теме «Основные теоремы».

Проиллюстрируем работу с КОПР. Контрольные задания расположены в конце каждой из трех выделенных тем (рис. 5.1).

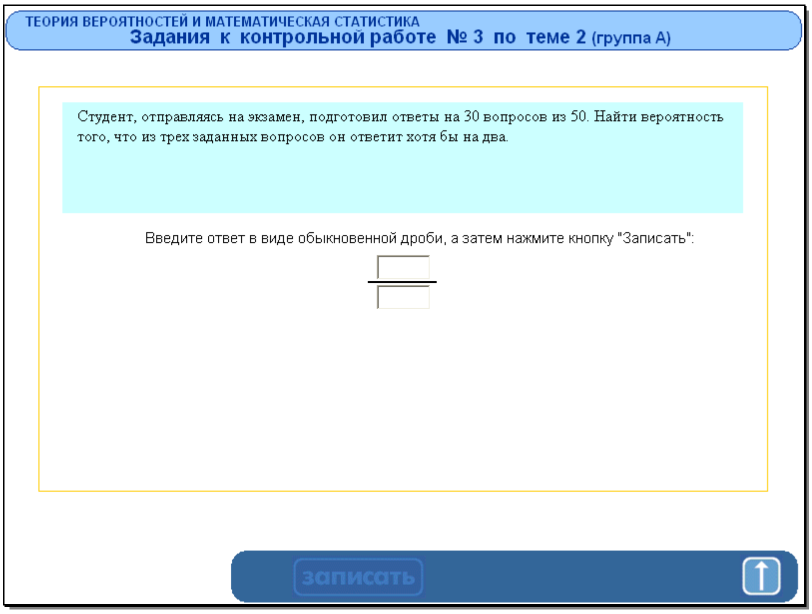


Рис. 5.2. Пример задания № 1 к контрольной работе.

Чтобы результаты выполнения задания были сохранены в протоколе, после ввода ответа необходимо нажать кнопку «Записать» (рис. 5.2). Когда результат выполнения задания сохранен верно, появляется надпись «Задание выполнено» (рис. 5.3).

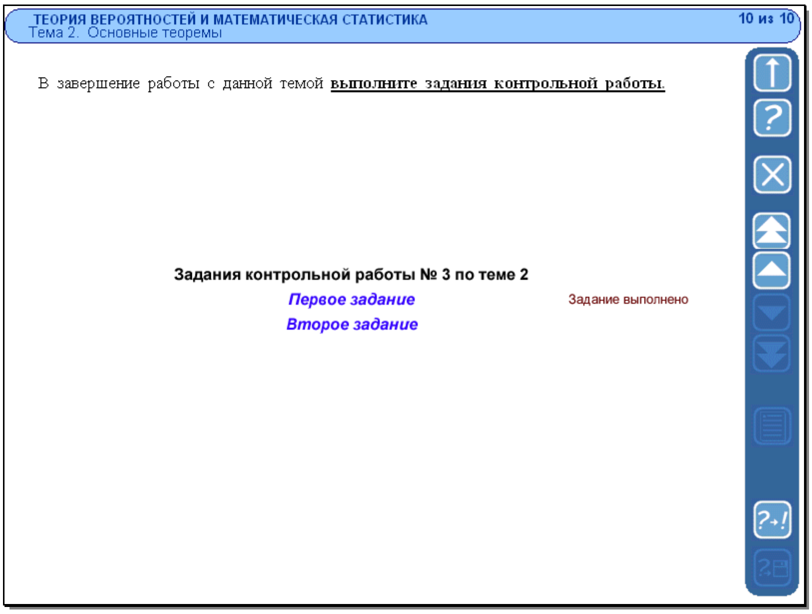


Рис. 5.3. Пример странички КОПР с выполненным заданием №1 контрольной работы.

Чтобы распечатать протокол работы с КОПР, необходимо вернуться к оглавлению и перейти по ссылке «Контрольная работа: инструкция, результаты » (рис. 5.4).

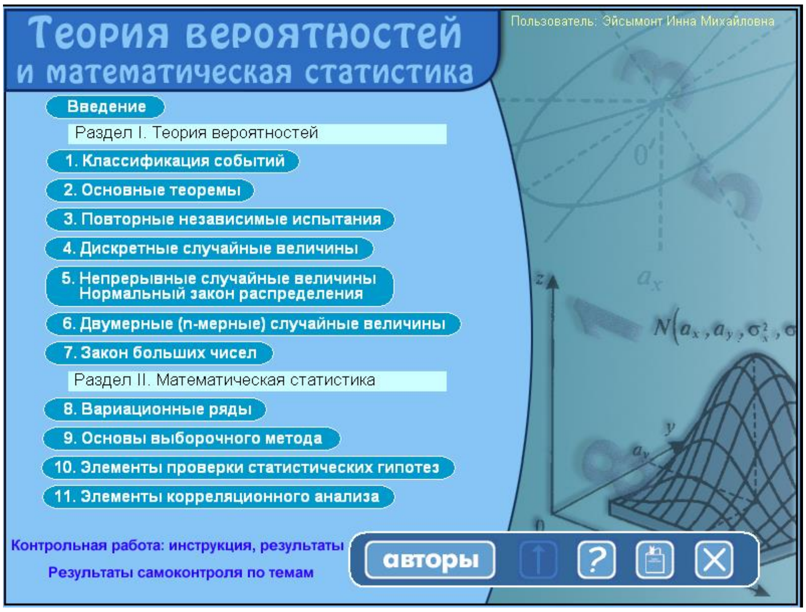


Рис. 5.4. Оглавление КОПР по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

```
Протокол работы с КОПР по дисциплине "Математический анализ и линейная алгебра"
28.11.2008   21:27

Студент: Ким Надежда Игорьевна
Группа: 127   № зачетной книжки: 08уб600193
ДАННЫЕ О ПОСЕЩЕНИИ СТРАНИЦ ТЕМ КОПР
Тема 1: ++++++++++++++
Тема 3: ++++++++++++
Тема 5: +++++++++++++++
ДАННЫЕ О ВЫПОЛНЕНИИ ДИАЛОГОВЫХ ПРИМЕРОВ
Тема 1: ---------
Тема 3: -+---
Тема 5: +-++++++-++++++++
СУММАРНОЕ ВРЕМЯ РАБОТЫ С ТЕМАМИ, МИНУТ
Тема 1: 46
Тема 3: 87,2
Тема 5: 98,8
РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (№ задания, ответ студента)
Тема 1:  2   BA'=(2, 4, 12; 3, 10, 20)
Тема 3: 11   x1=-1, x2=3, x3=4
Тема 5:  7   20
Тема 5:  1   -1,75
Тема 5: 12   15
Итого правильно: 5 из 5
```

Рис. 5.5. Пример протокола работы с КОПР.

На рис. 5.5 приведен пример протокола работы с КОПР. Протокол работы с КОПР содержит информацию о том, сколько времени студент работал с каждой из тем, какие диалоговые примеры были им проработаны, и сколько контрольных заданий студент выполнил верно. Поскольку при повторном обращении к заданиям контрольных работ задания остаются прежними, студент имеет возможность исправить свои ошибки и найти верные ответы для всех контрольных заданий.

6. Методические указания по компьютерному тестированию

Компьютерное тестирование проводится по всем темам дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Часть заданий – это теоретические вопросы, а часть – практические задания.

Как правило, студент проходит тестирование после того, как прослушан лекционный курс и проведены практические занятия, выполнена контрольная работа и пройдена защита (собеседование) по ней.

Для сдачи компьютерного тестирования студенту необходимо явиться в компьютерный класс со студенческим билетом или зачетной книжкой. Для выполнения тестовых заданий студенту необходимо иметь бумагу, ручку и калькулятор. Таблицы значений функций Гаусса, Лапласа и Пуассона в электронном виде размещены в тех секциях теста, где они могут потребоваться.

Время тестирования один час (60 минут) с момента получения первого тестового задания.

По результатам тестирования компьютером выставляется оценка. Если оценка положительная, то преподаватель проставляет в зачетную книжку студента зачет. Студентам, получившим при компьютерном тестировании оценку «неудовлетворительно», необходимо пройти тестирование повторно. К повторному тестированию студенты допускаются не ранее, чем через три дня после получения неудовлетворительной оценки. Студенты, получившие при тестировании оценку «неудовлетворительно» трижды, проходят устное собеседование по его результатам с преподавателем, после чего выставляется окончательная оценка.

6.1. Основные типы тестовых заданий

- Вопрос открытого типа: «**текстовая строка**».

Вопросы этого типа требуют вычисления точного ответа (<u>без округления</u>) в виде целого числа без знаков препинания: «5», «-5», либо в виде десятичной дроби через запятую, например, 0,9987. При этом предполагается, что если аргументы функций Гаусса и Лапласа больше 4, то соответственно $f(x) \approx 0$ и $\Phi(x) = 1$.

Пример. Всхожесть семян составляет 90%. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдет не менее 360. *Ответ:* 0,5.

Пример. Студент Иванов посещает лекции по математике с вероятностью 0,8, студент Петров с вероятностью 0,9, хотя бы один из них присутствует на каждой лекции. Какова вероятность того, что они встретились на лекции? *Ответ:* 0,7.

- Вопросы закрытого типа: «**один из многих**» и «**многие из многих**».

Вопросы этого типа предполагают, что необходимо вычислить правильный ответ и выбрать его из предложенного списка. Верных ответов может быть несколько. Если ответ требует округления, то округление производится по обычным правилам. Выбор правильного ответа осуществляется мышью. В примерах правильные ответы отмечены символом «•».

Пример. По списку в группе 20 студентов. Пусть ξ – число студентов, которые сдадут предстоящую сессию в срок. Какое из перечисленных событий является противоположным для события $A = (\xi < 4)$?

Ответы: • 1) $(\xi \geq 4)$; ◦ 2) $(\xi \geq 3)$; ◦ 3) $(\xi \geq 5)$.

Пример. Число X выбирают наудачу из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть событие A состоит в том, что число X делится на 3, а событие B – число X делится на 2. Укажите исходы этого эксперимента, составляющие событие $A+B$.

Ответы: ◦ 1) $(X = 1)$; • 2) $(X = 2)$; • 3) $(X = 3)$;
• 4) $(X = 4)$; ◦ 5) $(X = 5)$; • 6) $(X = 6)$.

- Вопрос на установление соответствия: «**множественное соответствие**».

Вопросы этого типа содержат два списка разной длины. Первый список – это перечень характеристик, которые требуется определить, а второй – возможные значения этих характеристик.

Пример. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,9. Пусть случайная величина ξ равна числу пробоин в мишени при двух выстрелах. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,01	0,10	0,18	0,81	0,90
$P(\xi=0)=$						
$P(\xi=1)=$						
$P(\xi=2)=$						
$P(\xi=3)=$						

Так должна выглядеть таблица верных ответов. Клетки таблицы выбираются мышью.

	0	0,01	0,10	0,18	0,81	0,90
$P(\xi=0)=$		V				
$P(\xi=1)=$				V		
$P(\xi=2)=$					V	
$P(\xi=3)=$	V					

6.2. Примеры тестовых заданий

6.1. Пусть A – случайное событие. Чему равно событие $A+\bar{A}$?

Ответы: 1) A; 2) $\bar{A}$; 3) достоверное событие; 4) невозможное событие.

6.2. Если наступление одного события исключает наступление другого, то события называются:

Ответы: 1) несовместными; 2) совместными;

3) независимыми; 4) зависимыми.

6.3. В урне 4 черных и 3 белых шара. Наудачу вынимают один шар. Пусть событие A состоит в том, что вынули белый шар, а событие B – вынули черный шар. Какие из следующих утверждений верны?

Ответы: 1) события A и B несовместны;

2) события A и B противоположны;

3) события A и B равновозможны;

4) события A и B независимы.

6.4. Число X выбирают наудачу из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Укажите, какие из перечисленных событий составляют полную группу событий.

Ответы: 1) $A = (X = 1)$; 2) $B = (X = 2)$; 3) $C = (X = 3)$;

4) D – «число X делится на 2»; 5) E – «X – простое число».

6.5. Какими из перечисленных свойств **не** могут обладать события A и B, если их вероятности равны соответственно 0,6 и 0,3.

Ответы: 1) образуют полную группу событий; 2) несовместны;

3) противоположны; 4) совместны.

6.6. Если наступление события B влечет за собой наступление события A, то $P(A \cdot B)$ равна:

Ответы: 1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) 0; 4) 1.

6.7. Вероятности событий A и B равны соответственно 0,3 и 0,4. Чему равна вероятность их суммы, если вероятность их произведения 0,1?

6.8. В зоопарке два страуса из 6 имеют рост более 2,5 м. На выездную выставку случайным образом выбирают трех страусов. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один с ростом более 2,5 м?

6.9. В урне 4 красных, один белый и один синий шар. Из урны извлекают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что извлеченные шары будут разных цветов.

6.10. Игральную кость подбросили один раз. Какова вероятность того, что выпадет не менее пяти очков?

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{3}$.

6.11. На шести карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. После перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают по порядку. Найти вероятность того, что при этом получится слово «МОСКВА»

Ответы: 1) $\frac{1}{46656}$; 2) $\frac{1}{360}$; 3) $\frac{1}{720}$; 4) $\frac{1}{120}$.

6.12. Некто забыл последние две цифры телефонного номера, но помнит, что они нечетные и различные. Какова вероятность того, что он сразу наберет нужный номер, если будет набирать эти цифры случайно?

6.13. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, а второй с вероятностью 0,8. Каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Какова вероятность того, что один из них промахнулся?

6.14. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 11 очков.

Ответы: 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{11}$; 4) $\frac{11}{36}$.

6.15. Игральную кость подбросили один раз. Рассмотрим два события: A – «выпало четное число очков», B – «выпало 3 очка». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0; 4) 1.

6.16. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны извлекают последовательно два шара. Рассмотрим два события: A – «первый извлеченный шар – белый», B – «второй извлеченный шар черный». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{4}{7}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{7}$.

6.17. Монету подбросили два раза. Рассмотрим два события: A – «выпали два орла», B – «второй раз выпал орел». Найти условную вероятность $P(A|B)$.

6.18. Подбросили две игральные кости. Рассмотрим два события: A – «сумма выпавших очков менее 4», B – «сумма выпавших очков равна 3». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 0; 4) 1.

6.19. В группе 4 отличника, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо студентов. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. На экзамен наугад приглашается один студент. Какова вероятность того, что он получит хорошую оценку?

6.20. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель 0,85. Какова вероятность того, что отобранная для проверки пара отремонтирована качественно?

Ответы: 1) 0,42; 2) 0,87; 3) 0,78; 4) 0,75.

6.21. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 2% брака, второй 3% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая бракованная деталь изготовлена вторым автоматом, если с первого автомата поступило 1000 деталей, а со второго 2000.

Ответы: 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,18; 4) 0,25.

6.22. Всхожесть семян составляет 90%. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдет 339 семян.

6.23. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,3 (для каждого пакета). Найти вероятность того, что из 2100 пакетов акций 1000 пакетов дадут доходы.

6.24. Завод производит мобильные телефоны. Вероятность того, что выпущенный телефон бракованный, равна 0,1. Найти вероятность того, что в партии из 900 телефонов окажется хотя бы 90 бракованных.

Ответы: 1) 0,4232; 2) 0,0269; 3) 0,5; 4) 0,19945.

6.25. Завод производит мобильные телефоны. Вероятность того, что выпущенный телефон бракованный, равна 0,015. Найти вероятность того, что в партии из 200 телефонов окажется хотя бы один бракованный.

6.26. Вероятность повреждения бутылки с минеральной водой при перевозке равна 0,002. Найти вероятность того, что из 2000 бутылок при перевозке будет повреждено менее двух.

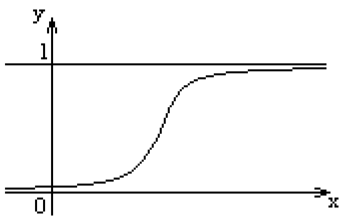
6.27. Всхожесть семян составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдет только одно.

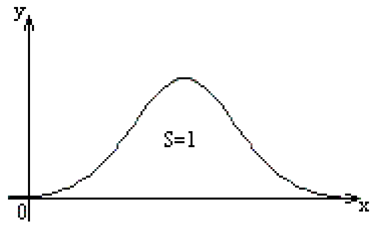
6.28. Найти $P(\xi = 2)$, если закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

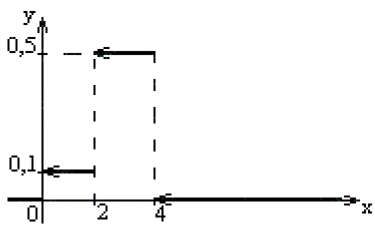
x_i	-1	2	3
p_i	0,2	?	0,7

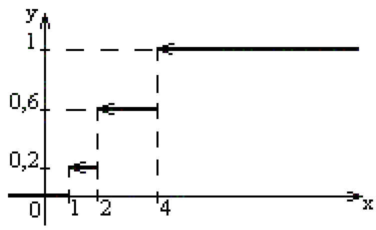
6.29. Укажите рисунки, на которых изображены функции распределения случайных величин.

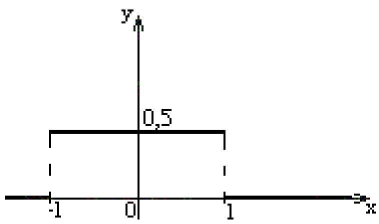
Ответы:

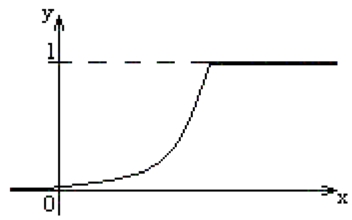
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

6.30. Укажите рисунки, на которых изображены функции распределения непрерывных случайных величин. (*См. ответы к задаче 29.*)

6.31. Укажите рисунки, на которых изображены кривые распределения случайных величин. (*См. ответы к задаче 29.*)

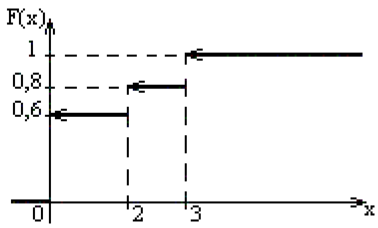


Рис. 6.1

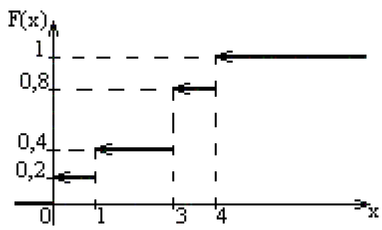


Рис. 6.2

6.32. Функция распределения случайной величины ξ изображена на рис.6.1. Укажите значения вероятностей случайной величины ξ в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$P(\xi=0)$ =						
$P(\xi=1)$ =						
$P(\xi=2)$ =						
$P(\xi=3)$ =						

6.33. Найти вероятность $P(1{,}5 \le \xi \le 3{,}5)$, если функция распределения случайной величины ξ изображена на рис. 6.2.

6.34. При каком значении параметра a плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 5{,}5 & \textit{при} \quad -1 < x < a, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

6.35. Закон распределения случайной величины ξ дан в табл. 6.1. Укажите значения функции распределения случайной величины ξ в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,1	0,3	0,4	0,5	1
$F(-2)$ =						
$F(0)$ =						
$F(2{,}5)$ =						
$F(5)$ =						

6.36. Найти вероятность $P(2 < \xi < 5)$, если закон распределения случайной величины ξ дан в табл. 6.2.

Табл. 6.1

x_i	–1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Табл. 6.2

x_i	1	3	4
p_i	0,1	0,4	0,5

6.37. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, а второй с вероятностью 0,5. Каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Пусть случайная величина ξ равна числу промахов. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$P(\xi=0)=$						
$P(\xi=1)=$						
$P(\xi=2)=$						
$P(\xi=3)=$						

6.38. В коробке 2 синие и 3 красные ручки. Преподаватель извлекает три ручки. Пусть случайная величина ξ равна числу извлеченных красных ручек. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8
$P(\xi=0)=$						
$P(\xi=1)=$						
$P(\xi=2)=$						
$P(\xi=3)=$						

6.39. Найти математическое ожидание случайной величины, если ее закон распределения дан в табл. 6.1.

6.40. Математическое ожидание случайной величины ξ равно 3,3. Найти дисперсию этой случайной величины, если ее закон распределения дан в табл. 6.2.

6.41. Математическое ожидание случайной величины ξ равно 1,5. Найти дисперсию этой случайной величины, если ее плотность имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \textit{при} \quad 0<x<3,\\ 0 & \textit{в остальных случаях}.\end{cases}$$

6.42. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,05. Найти математическое ожидание $M(2\xi-0{,}5)$, если случайная величина ξ равна числу выигрышных билетов среди 15 купленных.

6.43. Ветеринар в зоопарке обследует 5 жирафов. Вероятность того, что рост жирафа будет больше 6 метров, равна 0,1. Найти дисперсию $D(2\xi - 4)$, если случайная величина ξ равна числу обследованных жирафов с ростом более 6 метров.

6.44. Найти математическое ожидание $M(2\xi + 3)$, если случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения от 0 до 5 с вероятностями:

$$P(\xi = m) = C_5^m \cdot 0{,}1^m \cdot 0{,}9^{5-m}.$$

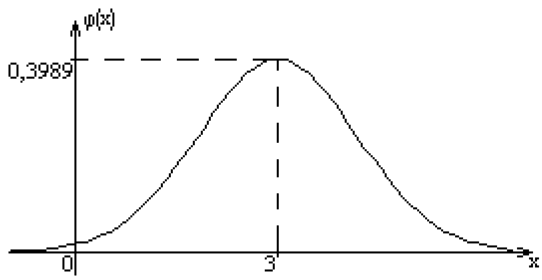
6.45. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 3,$ $\sigma^2 = 1$. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,0017	0,5	0,7054	0,9973	1
$P(\xi \geq 3) =$						
$P(\xi < 3{,}54) =$						
$P(\xi = 6) =$						
$P(\xi < 100) =$						

6.46. Длина анаконды описывается случайной величиной ξ, распределенной по нормальному закону, причем $P(\xi > 10) = 0{,}5$. Найти математическое ожидание $M(5\xi - 6)$.

6.47. Длина переднего рога у африканского белого носорога описывается случайной величиной ξ, распределенной по нормальному закону с параметрами a=0,8 и $\sigma^2 = 1$. Найти дисперсию $D(5\xi - 0{,}8)$.

6.48. Найти математическое ожидание $M(5\xi - 7)$, если случайная величина ξ распределена по нормальному закону, и график ее плотности имеет вид:



6.49. Найти дисперсию $D(4\xi - 3)$, если плотность случайной величины ξ имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

6.50. Найти дисперсию $D(3-2\xi)$, если случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$**.**

6.51. Под наблюдением ветеринара в зоопарке находится 300 животных. Вероятность того, что в течение дня животному потребуется помощь, равна 0,1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число вызовов, поступивших в течение дня, отклонится от своего среднего значения более чем на 6 (по абсолютной величине).

Ответы: 1) $\le 0{,}75$; 2) $\ge 0{,}25$; 3) $\ge 0{,}75$;

6.52. Вероятность изготовления нестандартной линзы равна 0,2. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что доля нестандартных линз в партии из 10000 штук отличается от вероятности изготовления таких линз более чем на 0,05 (по абсолютной величине).

Ответы: 1) $\le 0{,}0036$; 2) $\ge 0{,}9936$; 3) $\le 0{,}0064$.

6.53. В данной местности среднее значение скорости ветра у земли равно 4 м/сек. Используя лемму Чебышева, оценить вероятность того, что в заданный день скорость ветра при одном наблюдении не превысит 16 м/сек.

Ответы: 1) $\ge 0{,}75$; 2) $\le 0{,}25$; 3) $\ge 0{,}95$.

6.54. Найти несмещенную оценку генеральной средней, если данные, полученные в результате повторной выборки объема 50, представлены в табл. 6.3.

Табл. 6.3

x_i	100	200	400
n_i	20	20	10

Табл. 6.4

x_i	10	30	50
n_i	10	10	80

6.55. Найти несмещенную оценку генеральной доли значений признака, которые не превосходят 40, если данные, полученные в результате бесповторной выборки объема 100, представлены в табл. 6.4.

6.56. Найти состоятельную оценку генеральной дисперсии, если в результате повторной выборки получены следующие данные: $\overline{x} = 15$, $\overline{x^2} = 250$.

6.57. Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,9545 заключена генеральная доля, если по результатам повторной выборки объема 100 получена выборочная доля $w = 0{,}5$.

Ответы: 1) (0,05; 0,95); 2) (0,1; 0,5); 3) (0,4; 0,6); 4) (0,1; 0,9).

6.58. Как изменится доверительный интервал, если объем выборки оставить прежним, а доверительную вероятность уменьшить?

Ответы: 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

6.59. Как нужно изменить объем выборки, чтобы тот же доверительный интервал гарантировать с большей вероятностью?

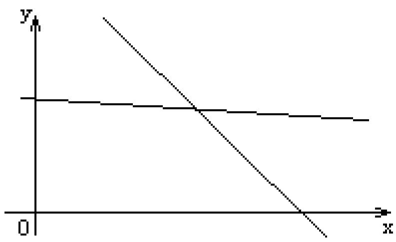
Ответы: 1) увеличить; 2) уменьшить; 3) оставить прежним.

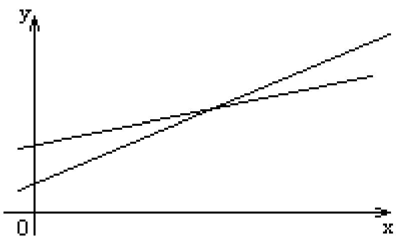
6.60. Какие из перечисленных величин являются неслучайными величинами?

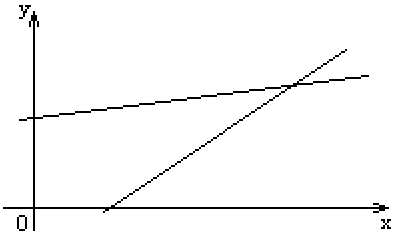
Ответы: 1) выборочная доля; 2) генеральная доля;
3) выборочная дисперсия; 4) генеральная средняя.

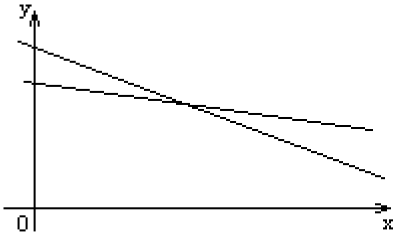
6.61. На рисунках изображены прямые регрессии с коэффициентами корреляции $|r| = 0{,}3$ и $|r| = 0{,}8$. Какой рисунок соответствует коэффициенту корреляции $r = -0{,}8$.

Ответы:

1) 

2) 

3) 

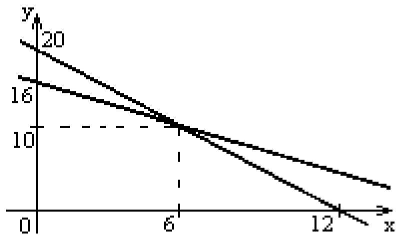
4) 

6.62. В задачах были вычислены коэффициенты регрессии b_{xy} и b_{yx}. В каких задачах допущены ошибки?

Ответы: 1) $b_{xy} = -0,3$ и $b_{yx} = -1,5$; 2) $b_{xy} = 3,21$ и $b_{yx} = 0,18$;

3) $b_{xy} = -0,25$ и $b_{yx} = 2,67$; 4) $b_{xy} = 0,3$ и $b_{yx} = 5$.

6.63. Найти среднее значение признака *Y*, если прямые регрессии для признаков *Y* и *X* изображены на рисунке:



6.64. При исследовании корреляционной зависимости между объемом производства *X* и доходами от реализации продукции *Y* получены следующие уравнения регрессии: $y = 0,3x + 120$ и $x = 1,6y - 88$. Найти выборочный коэффициент корреляции между величинами *X* и *Y*.

Ответы: 1) 0,48; 2) 0,69; 3) – 0,69; 4) – 0,49.

6.65. При исследовании корреляционной зависимости между удоем коров *X* и потреблением концентратов *Y*, получены следующие данные: $\bar{x} =$ 10 л/день, $\bar{y} = 2$ кг/день, $s_x^2 = 6$, $s_y^2 = 0,5$, $\mu = 1,5$. Используя соответствующее уравнение регрессии, найти средний удой коров при потреблении 3 кг концентратов в день.

6.66. При исследовании зависимости между потребляемой предприятием электроэнергией *X* (млн. кВт. ч) и производимой продукцией *Y* (млн. руб.) получены следующие данные: $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 4$, $b_{yx} = 0,8$, $b_{xy} = 0,5$. Найти выборочный коэффициент корреляции.

Ответы: 1) 0,63; 2) 0,4; 3) 0,6; 4) 0,3.

6.3. Типовой вариант теста

Т1. Посажено восемь семян. Обозначим через X число взошедших семян. Пусть событие A состоит в том, что число взошедших семян не более трех. С какими из перечисленных ниже событий событие A совместимо?

Ответы: 1) (X = 1); 2) (X = 3); 3) (X = 4); 4) (X = 7).

Т2. Пусть A – случайное событие, найти $P(A+\bar{A})=$

Ответы: 1) $P(A)$; 2) $P(\bar{A})$; 3) 0; 4) 1.

Т3. При игре в карты пользуются колодой из 36 карт. Какова вероятность того, что первой сданной картой будет не карта масти «пик»?

Т4. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,5. Какова вероятность того, что первое и второе орудия промахнулись?

Т5. Подбросили две игральные кости. Рассмотрим два события: A – «сумма выпавших очков более 10», B – «сумма выпавших очков равна 12». Найти условную вероятность $P(B|A)$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1.

Т6. Известно, что 90% выпускаемой продукции соответствует стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,9 и нестандартную с вероятностью 0,2. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

Ответы: 1) 0,83; 2) 0,98; 3) 0,17; 4) 0,81.

Т7. Предположим, что вероятность выловить рыбу при одной поклевке равна 0,7. Какова вероятность того, что рыбак поймает хотя бы одну рыбу, если у него четыре поклевки?

Т8. При каком значении параметра b функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \dfrac{x}{4}+b & \text{при} \quad 0<x\le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

Т9. В урне 2 красных и 3 зеленых шара. Из урны извлекают шары до тех пор, пока не появится зеленый. Пусть случайная величина ξ равна числу извлеченных шаров. Укажите значения вероятностей в соответствующих клетках таблицы:

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6
$P(\xi=0)$ =						
$P(\xi=1)$ =						
$P(\xi=2)$ =						
$P(\xi=3)$ =						

Т10. Найти математическое ожидание случайной величины ξ, если ее плотность имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0,5x & \text{при} \quad 0<x\le 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{4}{3}$.

Т11. Найти дисперсию $D(2\xi-3)$, если случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения с вероятностями:

$$P(\xi=m)=\frac{2^m}{m!}e^{-2}.$$

Т12. Ежедневный расход цемента на стройке – случайная величина, математическое ожидание которой равно 20 т, а среднее квадратическое отклонение 3 т. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что в ближайший день расход цемента на стройке отклонится от математического ожидания не более чем на 4 т (по абсолютной величине).

Ответы: 1) $\ge 0,4375$; 2) $\le 0,5625$; 3) $\ge 0,5625$.

Т13. Вычислить доверительную вероятность для оценки генеральной средней значения признака, если предельная ошибка выборки $\Delta=2$, а по результатам повторной выборки объема 100 получена выборочная средняя $\bar{x}=200$ и дисперсия $\sigma^2=100$.

Т14. Как связаны между собой средние квадратические отклонения выборочных средних для повторной $\sigma_{\bar{x}}$ и бесповторной $\sigma'_{\bar{x}}$ выборок, если объем генеральной совокупности очень велик?

Ответы: 1) $\sigma_{\bar{x}} > \sigma'_{\bar{x}}$; 2) $\sigma_{\bar{x}} < \sigma'_{\bar{x}}$; 3) $\sigma_{\bar{x}} = \sigma'_{\bar{x}}$.

Т15. Установить направление и тесноту связи между случайными величинами, если их коэффициент корреляции $r = -0{,}21$.

Ответы: 1) прямая; 2) обратная; 3) тесная; 4) слабая.

Т16. При исследовании корреляционной зависимости между объемом производства X и доходами от реализации продукции Y получены следующие уравнения регрессии: $y = 0{,}3x + 120$ и $x = 1{,}6y - 88$. Найти среднее значение величины Y.

6.4. Ответы к тестовым заданиям

6.1. 3. **6.2.** 1. **6.3.** 1; 2. **6.4.** 1; 3; 4. **6.5.** 1; 3. **6.6.** 2. **6.7.** 0,6. **6.8.** 0,8. **6.9.** 0,2. **6.10.** 2. **6.11.** 3. **6.12.** 0,05. **6.13.** 0,44. **6.14.** 1. **6.15.** 3. **6.16.** 4. **6.17.** 0,5. **6.18.** 4. **6.19.** 0,35. **6.20.** 2. **6.21.** 1. **6.22.** 0,00015. **6.23.** 0. **6.24.** 3. **6.25.** 0,9502. **6.26.** 0,0916. **6.27.** 0,0036. **6.28.** 0,1. **6.29.** 1; 4; 6. **6.30.** 1; 6. **6.31.** 2; 5. **6.32.** $P(\xi=0)=0{,}6$; $P(\xi=1)=0$; $P(\xi=2)=0{,}2$; $P(\xi=3)=0{,}2$. **6.33.** 0,4. **6.34.** 4,5. **6.35.** $F(-2)=0$; $F(0)=0{,}1$; $F(2{,}5)=0{,}5$; $F(5)=0{,}5$. **6.36.** 0,9. **6.37.** $P(\xi=0)=0{,}3$; $P(\xi=1)=0{,}5$; $P(\xi=2)=0{,}2$; $P(\xi=3)=0$. **6.38.** $P(\xi=0)=0$; $P(\xi=1)=0{,}3$; $P(\xi=2)=0{,}6$; $P(\xi=3)=0{,}1$. **6.39.** 3,2. **6.40.** 0,81. **6.41.** 0,75. **6.42.** 1. **6.43.** 1,8. **6.44.** 4. **6.45.** $P(\xi\geq 3)=0{,}5$; $P(\xi<3{,}54)=0{,}7054$; $P(\xi=6)=0$; $P(\xi<100)=1$. **6.46.** 44. **6.47.** 25. **6.48.** 8. **6.49.** 16. **6.50.** 8. **6.51.** 1. **6.52.** 3. **6.53.** 1. **6.54.** 200. **6.55.** 0,2. **6.56.** 25. **6.57.** 3. **6.58.** 2. **6.59.** 1. **6.60.** 2; 4. **6.61.** 4. **6.62.** 3; 4. **6.63.** 10. **6.64.** 1. **6.65.** 13. **6.66.** 2.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Геворкян П.С. *Теория вероятностей и математическая статистика: Курс лекций*/ П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт.— М.: Экономика, 2012.

Дополнительная

2. Кремер Н.Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.: ЮНИТИ, 2003, 2004, 2007.
3. Браилов А.В., Солодовников А.С. *Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Часть 3. Теория вероятностей*. М.:Финансы и статистика, 2010.
4. Денежкина И.Е., Орлова М.Г., Швецов Ю.Н. *Основы математической статистики. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы бакалавров.* М.: Финансовая академия при правительстве РФ, 2010.
5. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. *Математика в экономике. Учебник в 3 ч. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика.* М:. Финансы и статистика, 2008.