**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)
Факультет «Прикладная математика и информационные технологии»
Кафедра «Прикладная математика»**

И.А. Александрова, В.М. Гончаренко

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

**Методические указания для выполнения контрольных работ
(учебно-методическое пособие)**

Размещение на портале одобрено
на заседании кафедры «Прикладная математика»
Протокол № 02 от 28.09.2015

Москва 2015

Введение

Домашняя контрольная работа по дисциплине «Методы оптимальных решений» является основной формой текущего контроля самостоятельной работы студентов. В пособии представлен материал для домашней контрольной работе по всем частям курса дисциплины.

В результате выполнения работы студенты, с одной стороны, демонстрируют умения и навыки, приобретенные в ходе лекций и практических занятий, и получают оценки, являющиеся одной из компонент аттестации и баллов за работу в семестре. С другой стороны, выполнение заданий домашней контрольной работы является важной частью подготовки к семестровому экзамену по одной из основных прикладных дисциплин за весь курс обучения.

Сроки выполнения и сдачи домашней контрольной работы устанавливаются преподавателем. Преподаватель вправе разделить сроки ее выполнения на несколько частей – например, за первую и вторую половину семестра. Оценки выставляются, как правило, по итогам проверки работы и собеседования (или последующей аудиторной контрольной работы).

В пособии представлено 25 вариантов домашней контрольной работы. К дополнительному варианту № 26 приведены подробные решения, в которых продемонстрированы основные приемы и методы решения типовых задач.

Правила оформления домашней контрольной работы

1. Работа должна быть выполнена аккуратно и разборчиво, синей или черной ручкой на листах формата А4. Листы должны быть скреплены степлером.

2. Работа снабжается титульным листом, на котором приводятся основные данные студента: факультет, номер группы, фамилия, дата сдачи работы на проверку и ответы ко всем задачам в том порядке, в котором задачи сформулированы в пособии. Если задача не решена, вместо ответа ставится прочерк.

3. Решения задач контрольной работы должны быть приведены в том же порядке, что и в пособии. Номер решаемой задачи необходимо выделить (в квадратик, маркером и т.п.). Условия задачи не переписывается. В конце решения приводится ответ по форме: «Ответ:. . . ».

4. Неверное решение, решение задачи из другого варианта или задачи с измененным условием, отсутствие решения или выписанного на титульном листе ответа приводит к минимальной оценке задачи (0 баллов).

5. Неверный ответ (в том числе из-за ошибок округления) при верном решении задачи снижает оценку.

Тема 1. Оптимизация налогового бремени

Задача № 1. Пусть $R(q)$ - выручка от продажи некоторого продукта в количестве q, $C(q)$ - затраты на выпуск данного продукта. Найти

а) величину налога t на каждую единицу продукта, чтобы налог от всей реализуемой продукции был максимальным;

б) весь налоговый сбор;

в) определить изменение количества выпускаемой продукции.

1.1.	$R(q) = -3q^2 + 60q$ $C(q) = q^2 - 4q + 30$	1.10.	$R(q) = -3q^2 + 50q$ $C(q) = q^2 - 6q + 30$	1.19.	$R(q) = -q^2 + 26q$ $C(q) = q^2 - 2q + 20$
1.2.	$R(q) = -3q^2 + 44q$ $C(q) = q^2 - 4q + 30$	1.11.	$R(q) = -q^2 + 12q$ $C(q) = q^2 - 4q + 10$	1.20.	$R(q) = -q^2 + 44q$ $C(q) = q^2 - 4q + 26$
1.3.	$R(q) = -q^2 + 12q$ $C(q) = q^2 - 4q + 10$	1.12.	$R(q) = -q^2 + 35q$ $C(q) = q^2 - 5q + 30$	1.21.	$R(q) = -q^2 + 36q$ $C(q) = q^2 - 8q + 33$
1.4.	$R(q) = -4q^2 + 55q$ $C(q) = 2q^2 - 5q + 24$	1.13.	$R(q) = -2q^2 + 65q$ $C(q) = 2q^2 - 15q + 24$	1.22.	$R(q) = -2q^2 + 80q$ $C(q) = 2q^2 - 16q + 6$
1.5.	$R(q) = -2q^2 + 30q$ $C(q) = q^2 - 6q + 28$	1.14.	$R(q) = -2q^2 + 40q$ $C(q) = 2q^2 - 8q + 44$	1.23.	$R(q) = -q^2 + 40q$ $C(q) = q^2 - 8q + 30$
1.6.	$R(q) = -q^2 + 26q$ $C(q) = q^2 - 2q + 14$	1.15.	$R(q) = -3q^2 + 40q$ $C(q) = q^2 - 40q + 60$	1.24.	$R(q) = -q^2 + 40q$ $C(q) = q^2 - 4q + 18$
1.7.	$R(q) = -q^2 + 30q$ $C(q) = q^2 - 2q + 28$	1.16.	$R(q) = -q^2 + 10q$ $C(q) = q^2 - 6q + 20$	1.25.	$R(q) = -2q^2 + 30q$ $C(q) = q^2 - 6q + 28$
1.8.	$R(q) = -q^2 + 10q$ $C(q) = q^2 - 2q + 16$	1.17.	$R(q) = -3q^2 + 42q$ $C(q) = 3q^2 - 18q + 34$	1.26.	$R(q) = -3q^2 + 90q$ $C(q) = q^2 - 6q + 5$
1.9.	$R(q) = -q^2 + 20q$ $C(q) = q^2 - 4q + 15$	1.18.	$R(q) = -q^2 + 34q$ $C(q) = 2q^2 - 2q + 15$		

Тема 2. Оптимизация прибыли

Задача № 2. Для товаров x_1 и x_2 известны функции спроса $q_1 = q_1(p_1)$ и $q_2 = q_2(p_2)$, где p_1 и p_2 – цена единицы товара x_1 и x_2 соответственно. Фирма-монополист имеет функцию издержек $C = C(q_1, q_2)$. Вычислить максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдите соответствующий производственный план.

2.1.

$$q_1 = 25 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = \frac{39}{2} - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 6q_1q_2 + \frac{1}{2}q_2^2 + 5$$

2.2

$$q_1 = 32 - p_1$$
$$q_2 = 13 - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 4q_1q_2 + \frac{1}{2}q_2^2 + 3$$

2.3

$$q_1 = 27 - p_1$$
$$q_2 = \frac{49}{2} - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = q_1^2 + 3q_1q_2 + 2q_2^2 + 6$$

2.4

$$q_1 = 18 - p_1$$
$$q_2 = 17 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 5q_1q_2 + 2q_2^2 + 2$$

2.5

2.10.

$$q_1 = 16 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = \frac{52}{3} - \frac{2}{3}p_2$$
$$C = q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2 + 4$$

2.11.

$$q_1 = 27 - p_1$$
$$q_2 = \frac{49}{2} - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = q_1^2 + 3q_1q_2 + 2q_2^2 + 8$$

2.12.

$$q_1 = \frac{35}{2} - \frac{1}{4}p_1$$
$$q_2 = 38 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2 + 6$$

2.13.

$$q_1 = 33 - p_1$$
$$q_2 = 15 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 3q_1q_2 + 4$$

2.14.

2.19.

$$q_1 = 7 - \frac{1}{4}p_1$$
$$q_2 = 14 - p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 4q_1q_2 + 2q_2^2 + 8$$

2.20.

$$q_1 = 6 - \frac{1}{3}p_1$$
$$q_2 = 17 - p_2$$
$$C = q_1^2 + 5q_1q_2 + 2q_2^2 + 2$$

2.21.

$$q_1 = 22 - p_1$$
$$q_2 = 8 - p_2$$
$$C = 4q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 + 7$$

2.22.

$$q_1 = 22 - p_1$$
$$q_2 = 8 - p_2$$
$$C = 4q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 + 7$$

2.23.

$$q_1 = 35 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = 38 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2 + 6$$

2.6

$$q_1 = 11 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = 8 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 + 7$$

2.7

$$q_1 = 14 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = 7 - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = 4q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2 + 8$$

2.9

$$q_1 = \frac{50}{3} - \frac{1}{3}p_1$$
$$q_2 = 78 - 2p_2$$
$$C = q_1^2 + 6q_1q_2 + 2q_2^2 + 4$$

2.10

$$q_1 = \frac{50}{3} - \frac{1}{3}p_1$$
$$q_2 = 78 - 2p_2$$
$$C = q_1^2 + 6q_1q_2 + 2q_2^2 + 4$$

$$q_1 = 9 - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = \frac{17}{2} - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2 + 2$$

2.15.

$$q_1 = \frac{22}{3} - \frac{1}{3}p_1$$
$$q_2 = 4 - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = -2q_1^2 + 2q_1q_2 + 7$$

2.16.

$$q_1 = 24 - p_1$$
$$q_2 = 45 - p_2$$
$$C = q_1^2 + 5q_1q_2 + 4q_2^2 + 5$$

2.17.

$$q_1 = 70 - p_1$$
$$q_2 = 38 - p_2$$
$$C = -4q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2 + 6$$

2.18.

$$q_1 = 20 - p_1$$
$$q_2 = 30 - p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 3q_1q_2 + q_2^2 + 9$$

$$q_1 = \frac{33}{2} - \frac{1}{2}p_1$$
$$q_2 = 15 - p_2$$
$$C = 2q_1^2 + 3q_1q_2 + 4$$

2.24.

$$q_1 = 24 - p_1$$
$$q_2 = 15 - \frac{1}{3}p_2$$
$$C = q_1^2 + 5q_1q_2 + 2q_2^2 + 5$$

2.25.

$$q_1 = \frac{35}{2} - \frac{1}{4}p_1$$
$$q_2 = 38 - p_2$$
$$C = 3q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2 + 6$$

2.26.

$$q_1 = 28 - p_1$$
$$q_2 = 7 - \frac{1}{2}p_2$$
$$C = 5q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2 + 8$$

Тема 3. Транспортная задача.

Задача № 3. Найти решение транспортной задачи, если из A_2 в B_4 перевозки запрещены, из A_1 в B_3 должно быть доставлено не менее n единиц груза, а из A_3 в B_1 не более m единиц груза.

3.1.	a_i/b_j	11	7	8	4	n=5, m=3	3.14		13	17	23	27	n=13, m=10
	9	2	5	8	1			30	3	2	4	5	
	16	8	3	9	2			25	6	1	4	3	
	5	7	4	6	3			25	7	5	3	5	
3.2.	a_i/b_j	20	30	30	20	n=15, m=10	3.15.	a_i/b_j	110	130	70	90	n=40, m=70
	23	4	3	6	5			100	4	2	3	5	
	38	3	4	5	6			200	5	4	1	3	
	39	2	5	4	7			100	4	3	4	4	
3.3.	a_i/b_j	40	40	30	50	n=20, m=15	3.16	a_i/b_j	23	19	18	10	n=6, m=16
	40	3	1	5	4			30	1	3	4	5	
	60	6	1	2	3			20	10	8	2	2	
	60	4	4	5	7			20	3	3	6	5	
3.4	a_i/b_j	20	20	30	30	n=15, m=10	3.17.	a_i/b_j	100	200	100	150	n=35, m=75
	20	2	4	8	2			150	10	3	2	3	
	30	4	6	10	3			200	3	4	1	3	
	50	2	5	9	7			200	5	2	3	4	
3.5.	a_i/b_j	100	100	150	150	n=50, m=50	3.18.	a_i/b_j	7	8	9	6	n=4, m=3
	100	2	1	3	4			7	3	2	2	2	
	150	4	3	1	7			10	2	1	3	4	
	250	5	8	9	15			13	3	2	3	5	
3.6.	a_i/b_j	12	6	8	4	n=3, m=10	3.19.	a_i/b_j	105	115	95	85	n=65, m=55
	10	2	3	5	1			150	9	8	5	4	
	5	4	2	6	5			160	7	4	3	2	
	15	7	10	3	6			90	6	2	2	3	
3.7.	a_i/b_j	10	20	40	30	n=25, m=7	3.20.	a_i/b_j	200	300	300	400	n=250, m=60
	31	7	2	3	1			500	5	9	2	1	
	19	4	10	5	2			400	3	4	5	3	
	50	1	3	4	5			300	7	4	4	5	
3.8.	a_i/b_j	100	150	30	20	n=20, m=60	3.21.	a_i/b_j	20	35	15	30	n=7, m=10
	120	4	1	2	3			30	7	2	3	4	
	100	7	5	3	4			50	6	3	1	5	
	80	10	2	4	5			20	5	2	2	3	
3.9.	a_i/b_j	200	100	50	150	n=30, m=50	3.22.	a_i/b_j	150	250	300	100	n=250, m=120
	200	2	4	5	7			400	3	1	4	5	
	200	1	8	9	10			250	5	2	7	4	
	100	3	2	4	6			150	9	2	5	2	
3.10	a_i/b_j	10	15	13	17	n=3, m=3	3.23.	a_i/b_j	9	11	13	7	n=10, m=5
	15	3	1	3	9			17	3	2	5	4	
	35	10	2	4	5			16	2	1	4	3	

	5	9	1	5	6			7	3	4	2	2	
3.11.	a_i/b_j	200	200	50	150	n=20, m=150	3.24.	a_i/b_j	110	220	130	140	n=100, m=100
	300	7	5	4	3			250	9	8	7	6	
	100	1	2	5	4			200	5	4	3	1	
	200	3	2	4	5			150	6	5	2	4	
3.12	a_i/b_j	10	15	23	17	n=15, m=5	3.25	a_i/b_j	25	35	46	24	n=35, m=15
	20	10	5	4	2			65	10	8	9	7	
	25	2	3	4	5			45	4	3	4	1	
	20	7	8	6	4			20	6	4	2	2	
3.13	a_i/b_j	100	50	170	30	n=50, m=50	3.26.	a_i/b_j	60	110	60	70	n=30, m=20
	100	3	8	2	1			50	2	3	5	7	
	180	9	7	6	5			100	8	11	12	4	
	70	2	3	4	4			150	3	1	6	12	

Тема 4. Метод искусственного базиса.

Задача № 4. Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса.

4.1. $\begin{cases} z=-6x_4-9x_5\to\min \\ x_1+x_4+x_5=3, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=54, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=32, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.5. $\begin{cases} z=-2x_4-9x_5-9\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-3, \\ x_1+x_2+2x_5=22, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=29, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.2. $\begin{cases} z=-2x_4-6x_5-1\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-7, \\ x_1+x_2+2x_5=24, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=41, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.6. $\begin{cases} z=-x_4-2x_5-4\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=17, \\ x_2-x_4+x_5=15, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=40, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.3. $\begin{cases} z=2-5x_5-4x_4\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=23, \\ x_2-x_4+x_5=18, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=52, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.7. $\begin{cases} z=3-10x_5-5x_4\to\min \\ x_1+x_4+x_5=4, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=44, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=23, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.4. $\begin{cases} z=-7x_4-10x_5-1\to\min \\ x_1+x_4+x_5=2, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=52, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=29, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.8. $\begin{cases} z=-9x_4-10x_5-9\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-3, \\ x_1+x_2+2x_5=17, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=32, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.9. $\begin{cases} z=-8x_4-9x_5-7\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=20, \\ x_2-x_4+x_5=12, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=49, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.15. $\begin{cases} z=10-9x_5-2x_4\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=15, \\ x_2-x_4+x_5=15, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=40, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.10. $\begin{cases} z=-2x_4-8x_5\to\min \\ x_1+x_4+x_5=10, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=68, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=41, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.16. $\begin{cases} z=-3x_4-5x_5-9\to\min \\ x_1+x_4+x_5=7, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=64, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=39, \\ x_i\ge 0, i=1,\dots,5 \end{cases}$.

4.11. $\begin{cases} z=-7x_4-9x_5-7\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-9, \\ x_1+x_2+2x_5=28, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=48, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.12. $\begin{cases} z=-x_4-9x_5-10\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=20, \\ x_2-x_4+x_5=15, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=49, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.13. $\begin{cases} z=-2x_4-8x_5-2\to\min \\ x_1+x_4+x_5=8, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=65, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=37, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.14. $\begin{cases} z=-5x_4-9x_5-4\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-1, \\ x_1+x_2+2x_5=15, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=27, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.17. $\begin{cases} z=-4x_4-7x_5-10\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-10, \\ x_1+x_2+2x_5=22, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=45, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.18. $\begin{cases} z=7-8x_5-4x_4\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=19, \\ x_2-x_4+x_5=17, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=45, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.19. $\begin{cases} z=2-10x_5-4x_4\to\min \\ x_1+x_4+x_5=6, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=73, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=45, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.20. $\begin{cases} z=-4x_4-7x_5-2\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-1, \\ x_1+x_2+2x_5=14, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=31, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.21. $\begin{cases} z=-2x_4-10x_5-3\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=22, \\ x_2-x_4+x_5=20, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=47, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.22. $\begin{cases} z=8-7x_5-2x_4\to\min \\ x_1+x_4+x_5=9, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=63, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=38, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.23. $\begin{cases} z=8-8x_5-6x_4\to\min \\ -x_1-x_4-x_5=-4, \\ x_1+x_2+2x_5=16, \\ 2x_1+x_3+3x_4+x_5=32, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.24. $\begin{cases} z=4-6x_5-3x_4\to\min \\ x_3-x_1-2x_5=16, \\ x_2-x_4+x_5=17, \\ 2x_3-x_1+x_4-3x_5=38, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$.

4.25. $\begin{cases} z=8-4x_5-x_4\to\min \\ x_1+x_4+x_5=3, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=70, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=42, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} z=-x_4-2x_5-5\to\min \\ x_1+x_4+x_5=2, \\ 3x_3-x_2+4x_4-4x_5=55, \\ 2x_3-x_2+3x_4-3x_5=32, \\ x_i\ge 0, i=1,...,5 \end{cases}$

Тема 5. Задачи целочисленного программирования

Задача № 5. Решить задачу целочисленного программирования

а) графическим способом;

б) методом Гомори;

в) дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

5.1. $\begin{cases} z = 3x + 6y + 4 \to \max \\ y - x - 5 \le 0, \\ x + y - 16 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.2. $\begin{cases} z = x + 4y + 3 \to \max \\ y - x - 4 \le 0, \\ x + y - 7 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.3. $\begin{cases} z = 3x + 4y + 3 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 9 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.7. $\begin{cases} z = 5x + 6y + 5 \to \max \\ y - x - 3 \le 0, \\ x + y - 6 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.8. $\begin{cases} z = x + 5y + 2 \to \max \\ y - x - 5 \le 0, \\ x + y - 10 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.9. $\begin{cases} z = 3x + 8y + 2 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 13 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.10. $\begin{cases} z = 3x + 4y + 3 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 13 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.4. $\begin{cases} z = 3x + 8y + 5 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 17 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.5. $\begin{cases} z = 5x + 8y + 2 \to \max \\ y - x - 5 \le 0, \\ x + y - 10 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.6. $\begin{cases} z = 4x + 5y + 4 \to \max \\ y - x - 3 \le 0, \\ x + y - 8 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.15. $\begin{cases} z = 2x + 6y + 3 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 11 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.16. $\begin{cases} z = 4x + 5y + 5 \to \max \\ y - x - 4 \le 0, \\ x + y - 11 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.17. $\begin{cases} z = x + 4y + 3 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 7 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.18. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 5 \to \max \\ y - x - 3 \le 0, \\ x + y - 10 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.11. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 11 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.12. $\begin{cases} z = x + 5y + 1 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 9 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.13. $\begin{cases} z = 4x + 5y + 1 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 11 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.14. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 2 \le 0, \\ x + y - 13 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.23. $\begin{cases} z = 5x + 7y + 1 \to \max \\ y - x - 5 \le 0, \\ x + y - 10 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.24. $\begin{cases} z = 4x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 17 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.19. $\begin{cases} z = 2x + 4y + 1 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 9 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.20. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 3 \to \max \\ y - x - 4 \le 0, \\ x + y - 13 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.21. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 11 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.22. $\begin{cases} z = 4x + 9y + 3 \to \max \\ y - x - 6 \le 0, \\ x + y - 9 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.25. $\begin{cases} z = 3x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 3 \le 0, \\ x + y - 6 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

5.26. $\begin{cases} z = 4x + 7y + 4 \to \max \\ y - x - 4 \le 0, \\ x + y - 7 \le 0 \\ x \in Z, y \in Z, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$.

Тема 6. Задачи многокритериальной оптимизации

Задача № 6. Найти компромиссное решение многокритериальной задачи оптимизации методом идеальной точки.

6.1. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 16, x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.2. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 7, x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.3. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 4x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \le 12, x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.4. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 12, x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.5. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \le 14, x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.6. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \le 9, x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.14. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 5x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 11, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.15. $\begin{cases} f_1 = 5x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 4x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 10, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.16. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 10, x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.17. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 13, x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.18. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \le 14, x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.19. $\begin{cases} f_1 = 5x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 17, x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.7. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 12, x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.8. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 8, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.9. $\begin{cases} f_1 = 5x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 2x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \le 11, x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.10. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 4x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 7, x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.11. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \le 16, x_2 \le 17, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.12. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \le 10, x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.13. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 8, x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.20. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 14, x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.21. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + 4x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \le 12, x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.22. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 8, x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.23. $\begin{cases} f_1 = 6x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \le 11, x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.24. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = 5x_1 + 6x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \le 15, x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$.

6.25. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 7, x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \le 12, x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Тема 7. Задачи динамического программирования

Задача № 7. Планируется работа двух предприятий на n лет. Начальные ресурсы равны s_0. Средства x, вложенные в 1-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$, и возвращаются в размере $\varphi_1(x)$. Средства y, вложенные в 2-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_2(y)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y)$. В конце года возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль.

7.1.	$s_0 = 2000$	$n = 4$	7.14.	$s_0 = 10000$	$n = 3$
	$f_1(x) = 0,6x$	$\varphi_1(x) = 0,3x$		$f_1(x) = 0,8x$	$\varphi_1(x) = 0,7x$
	$f_2(y) = 0,5y$	$\varphi_2(y) = 0,5y$		$f_2(y) = 0,9y$	$\varphi_2(y) = 0,5y$
7.2.	$s_0 = 5000$	$n = 3$	7.15.	$s_0 = 4000$	$n = 4$
	$f_1(x) = 0,3x$,	$\varphi_1(x) = 0,1x$		$f_1(x) = 0,3x$	$\varphi_1(x) = 0,4x$
	$f_2(y) = 0,2y$	$\varphi_2(y) = 0,3y$		$f_2(y) = 0,4y$	$\varphi_2(y) = 0,5y$
7.3.	$s_0 = 3000$	$n = 4$	7.16.	$s_0 = 10000$	$n = 3$
	$f_1(x) = 0,7x$	$\varphi_1(x) = 0,2x$		$f_1(x) = 0,9x$	$\varphi_1(x) = 0,6x$
	$f_2(y) = 0,6y$	$\varphi_2(y) = 0,4y$		$f_2(y) = 0,6y$	$\varphi_2(y) = 0,4y$
7.4.	$s_0 = 10000$	$n = 3$	7.17.	$s_0 = 2000$	$n = 4$
	$f_1(x) = 0,9x$	$\varphi_1(x) = 0,7x$		$f_1(x) = 0,5x$	$\varphi_1(x) = 0,3x$
	$f_2(y) = 0,9y$	$\varphi_2(y) = 0,8y$		$f_2(y) = 0,7y$	$\varphi_2(y) = 0,4y$
7.5.	$s_0 = 4000$	$n = 4$	7.18.	$s_0 = 8000$	$n = 3$
	$f_1(x) = 0,3x$	$\varphi_1(x) = 0,3x$		$f_1(x) = 0,5x$	$\varphi_1(x) = 0,7x$
	$f_2(y) = 0,2y$	$\varphi_2(y) = 0,5y$		$f_2(y) = 0,5y$	$\varphi_2(y) = 0,6y$
7.6.	$s_0 = 10000$	$n = 3$	7.19.	$s_0 = 1500$	$n = 4$
	$f_1(x) = 0,7x$	$\varphi_1(x) = 0,6x$		$f_1(x) = 0,3x$	$\varphi_1(x) = 0,3x$
	$f_2(y) = 0,6y$	$\varphi_2(y) = 0,8y$		$f_2(y) = 0,4y$	$\varphi_2(y) = 0,6y$
7.7	$s_0 = 2000$	$n = 4$	7.20.	$s_0 = 10000$	$n = 3$
	$f_1(x) = 0,5x$	$\varphi_1(x) = 0,2x$		$f_1(x) = 0,7x$	$\varphi_1(x) = 0,3x$
	$f_2(y) = 0,4y$	$\varphi_2(y) = 0,4y$		$f_2(y) = 0,2y$	$\varphi_2(y) = 0,6y$
7.8	$s_0 = 8000$	$n = 3$	7.21.	$s_0 = 2000$	$n = 4$
	$f_1(x) = 0,6x$	$\varphi_1(x) = 0,7x$		$f_1(x) = 0,6x$	$\varphi_1(x) = 0,6x$
	$f_2(y) = 0,5y$	$\varphi_2(y) = 0,9y$		$f_2(y) = 0,4y$	$\varphi_2(y) = 0,5y$
7.9	$s_0 = 1500$	$n = 4$	7.22.	$s_0 = 5000$	$n = 3$

	$f_1(x)=0,3x$	$\varphi_1(x)=0,4x$		$f_1(x)=0,5x$,	$\varphi_1(x)=0,1x$
	$f_2(y)=0,2y$	$\varphi_2(y)=0,6y$		$f_2(y)=0,2y$	$\varphi_2(y)=0,2y$
7.10	$s_0=10000$	$n=3$	7.23	$s_0=3000$	$n=4$
	$f_1(x)=0,3x$	$\varphi_1(x)=0,3x$		$f_1(x)=0,7x$	$\varphi_1(x)=0,3x$
	$f_2(y)=0,2y$	$\varphi_2(y)=0,5y$		$f_2(y)=0,5y$	$\varphi_2(y)=0,4y$
7.11.	$s_0=2000$	$n=4$	7.24.	$s_0=10000$	$n=3$
	$f_1(x)=0,6x$	$\varphi_1(x)=0,2x$		$f_1(x)=0,8x$	$\varphi_1(x)=0,7x$
	$f_2(y)=0,4y$	$\varphi_2(y)=0,5y$		$f_2(y)=0,9y$	$\varphi_2(y)=0,7y$
7.12	$s_0=5000$	$n=3$	7.25	$s_0=4000$	$n=4$
	$f_1(x)=0,4x$,	$\varphi_1(x)=0,1x$		$f_1(x)=0,3x$	$\varphi_1(x)=0,4x$
	$f_2(y)=0,2y$	$\varphi_2(y)=0,2y$		$f_2(y)=0,4y$	$\varphi_2(y)=0,5y$
7.13	$s_0=3000$	$n=4$	7.26	$s_0=10000$	$n=4$
	$f_1(x)=0,8x$	$\varphi_1(x)=0,2x$		$f_1(x)=0,3x$	$\varphi_1(x)=0,1x$
	$f_2(y)=0,6y$	$\varphi_2(y)=0,5y$		$f_2(y)=0,2y$	$\varphi_2(y)=0,3y$

Задача № 8. Планируется работа трех предприятий на 1 год. Начальные средства равны $s_0=4$ тыс. у.е., а вложения кратны 1 тыс. у.е. При этом x тыс. у.е., вложенные в k-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_k(x)$. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль.

8.1.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	3	5
2	7	8	9
3	11	12	13
4	20	16	17

8.14.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	3	4	2
2	8	7	6
3	12	13	14
4	15	17	18

8.2.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	1	2	3
2	7	5	6
3	14	15	13
4	20	18	19

8.15.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	4	3
2	10	11	9
3	15	14	16
4	20	21	19

8.3.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	4	5
2	9	8	10
3	13	14	15
4	20	19	18

8.16.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	5	3
2	8	8	9
3	12	13	14
4	16	18	17

8.4.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	3	4	2
2	8	7	6
3	12	13	14
4	15	17	18

.

8.5.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	4	3
2	10	11	9
3	15	14	16
4	20	21	19

.

8.6.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	5	3
2	8	8	9
3	12	13	14
4	16	18	17

.

8.7.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	3	5
2	8	9	11
3	13	15	14
4	21	18	20

.

8.8.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	6	4
2	10	9	11
3	16	15	18
4	23	22	24

.

8.9.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	2	3	4
2	8	7	7
3	12	14	13
4	20	18	22

8.10.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	3	5	4
2	8	9	8
3	16	15	13
4	20	19	21

8.17.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	3	5
2	8	9	11
3	13	15	14
4	21	18	20

.

8.18

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	6	4
2	10	9	11
3	16	15	18
4	23	22	24

.

8.19

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	2	3	4
2	8	7	7
3	12	14	13
4	20	18	22

8.20.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	3	5	4
2	8	9	8
3	16	15	13
4	20	19	21

8.21

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	4	3	5
2	7	8	9
3	11	12	13
4	20	16	17

8.22

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	1	2	3
2	7	5	6
3	14	15	13
4	20	18	19

.

8.23.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	4	5
2	9	8	10
3	13	14	15
4	20	19	18

.

8.11.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 4 | 3 | 5 2 | 7 | 8 | 9 3 | 11 | 12 | 13 4 | 20 | 16 | 17	8.24.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 5 | 4 | 5 2 | 9 | 8 | 10 3 | 13 | 14 | 15 4 | 20 | 19 | 18 .
8.12.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 1 | 2 | 3 2 | 7 | 5 | 6 3 | 14 | 15 | 13 4 | 20 | 18 | 19 .	8.25.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 3 | 4 | 2 2 | 8 | 7 | 6 3 | 12 | 13 | 14 4 | 15 | 17 | 18 .
8.13.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 5 | 4 | 5 2 | 9 | 8 | 10 3 | 13 | 14 | 15 4 | 20 | 19 | 18 .	8.26.	x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$: 1 | 2 | 3 | 1 2 | 7 | 6 | 6 3 | 13 | 12 | 14 4 | 17 | 19 | 18

Тема 7. Элементы теории игр

Задача № 9. Игра задана платежной матрицей A. Составить соответствующую игрокам пару двойственных задач, найти оптимальные стратегии и цену игры.

9.1. $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\2&4&3\\3&2&4\end{pmatrix}.$	9.10. $A=\begin{pmatrix}4&3&5\\5&4&3\\3&5&4\end{pmatrix}$	9.19 $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\2&5&4\\4&2&5\end{pmatrix}$
9.2. $A=\begin{pmatrix}2&3&5\\3&5&2\\5&2&3\end{pmatrix}.$	9.11. $A=\begin{pmatrix}2&4&3\\4&3&2\\3&2&4\end{pmatrix}.$	9.20. $A=\begin{pmatrix}4&3&5\\5&4&3\\3&5&4\end{pmatrix}$
9.3. $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&1&3\\5&3&1\end{pmatrix}.$	9.12. $A=\begin{pmatrix}2&4&5\\4&5&2\\5&2&4\end{pmatrix}.$	9.21 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}.$
9.4. $A=\begin{pmatrix}3&2&5\\5&3&2\\2&5&3\end{pmatrix}.$	9.13. $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&1&3\\3&4&1\end{pmatrix}.$	9.22 $A=\begin{pmatrix}2&3&5\\3&5&2\\5&2&3\end{pmatrix}.$

9.5.	$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\5&2&4\\4&5&2\end{pmatrix}.$	9.14	$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\5&1&2\\2&5&1\end{pmatrix}.$	9.23.	$A=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&6&3\\3&4&6\end{pmatrix}.$
9.6.	$A=\begin{pmatrix}6&3&2\\2&6&3\\3&2&6\end{pmatrix}.$	9.15.	$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\6&2&4\\4&6&2\end{pmatrix}.$	9.24.	$A=\begin{pmatrix}5&2&1\\1&5&2\\2&1&5\end{pmatrix}.$
9.7.	$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\4&1&2\\2&4&1\end{pmatrix}.$	9.16.	$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\2&4&3\\3&2&4\end{pmatrix}.$	9.25.	$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\6&1&4\\4&6&1\end{pmatrix}.$
9.8.	$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\5&1&2\\2&5&1\end{pmatrix}.$	9.17.	$A=\begin{pmatrix}6&2&5\\5&6&2\\2&5&6\end{pmatrix}.$	9.26.	$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$
9.9.	$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&1&4\\4&2&1\end{pmatrix}.$	9.18.	$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\4&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}.$		

Решение варианта № 26

Задача № 1. Пусть $R(q) = -3q^2 + 90q$ - выручка от продажи некоторого продукта в количестве q, $C(q) = q^2 - 6q + 5$ - затраты на выпуск данного продукта. Найти

а) величину налога t на каждую единицу продукта, чтобы налог от всей реализуемой продукции был максимальным;

б) весь налоговый сбор;

в) определить изменение количества выпускаемой продукции.

Решение. При введении налога доход поставщика уменьшится на величину $T = tq$ и составит $R_t(q) = 90q - 3q^2 - tq$. Затраты при выпуске q при этом не меняются, поэтому прибыль поставщика

$$\Pi_t(q) = R_t(q) - C(q) = 90q - 3q^2 - tq - \left(q^2 - 6q + 5\right) = 96q - 4q^2 - tq - 5.$$

Необходимое условие максимума прибыли $\Pi_t'(q) = 0$, т.е.

$$96 - 8q - t = 0,$$

$$q_t = 12 - t/8.$$

Поскольку $\Pi_t''(q) = -8 < 0$, то точка $q = 12 - t/8$ определяет максимум прибыли. Величина общего сбора от налога: $T(t) = tq = 12t - t^2/8$.

Максимальный сбор достигается при условии $T'(t) = 0$, т.е.

$$12 - t/4 = 0,\ t = 48.$$

Так как $T''(t) = -1/4 < 0$, то $t^* = 48$ - точка максимума $T(t)$. Весь налоговый сбор

$$T(48) = 12 \cdot 48 - 48^2/8 = 288.$$

а объем производства равен $q_{t^*} = 12 - 48/8 = 6$.

Если бы дополнительный налог не вводился, то прибыль поставщика равнялась бы $\Pi(q) = 96q - 4q^2 - 5$. При этом $\Pi'(q) = -8q + 96$, и максимум прибыли достигался бы при объеме производства $q = 12$. Таким образом, введение дополнительного налога уменьшает объем производства в два раза (с 12 до 6).

Ответ. $t^* = 48$; $T(48) = 288$; $q_{t^*} = 6$, $q = 12$, объем производства уменьшится в два раза.

Задача № 2. Для товаров x_1 и x_2 известны функции спроса $q_1 = 28 - p_1$ и $q_2 = 7 - \frac{1}{2}p_2$, где p_1 и p_2 – цена единицы товара x_1 и x_2 соответственно. Фирма-монополист имеет функцию издержек $C = 5q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2 + 8$. Вычислить максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдите соответствующий производственный план.

Решение. Прибыль фирмы определяется формулой:

$$\begin{aligned}
\Pi(q_1, q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - 5q_1^2 - 4q_1q_2 - q_2^2 - 8 = \\
&= (28 - q_1)q_1 + (14 - 2q_2)q_2 - 5q_1^2 - 4q_1q_2 - q_2^2 - 8 = \\
&= -6q_1^2 - 3q_1^2 + 28q_1 + 14q_2 - 4q_1q_2 - 8
\end{aligned}$$

Частные производные функции прибыли:

$$\Pi'_{q_1} = 28 - 12q_1 - 4q_2, \quad \Pi'_{q_2} = 14 - 4q_1 - 6q_2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \Pi'_{q_1} = 0, \\ \Pi'_{q_2} = 0, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 28 - 12q_1 - 4q_2 = 0, \\ 14 - 4q_1 - 6q_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3q_1 + q_2 = 7, \\ 2q_1 + 3q_2 = 7, \end{cases}$$

находим, что

$$q_1 = 2, \; q_2 = 1$$

Для проверки достаточного условия максимума находим

$$\Pi''_{q_1q_1} = -12, \quad \Pi''_{q_1q_2} = -4, \quad \Pi''_{q_2q_2} = -6.$$

Матрица вторых производных:

$$G = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

имеет угловые миноры

$$\Delta_1 = -12 < 0, \; \Delta_2 = (-12)(-6) - (-4)^2 = 56 > 0.$$

Поэтому точка $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, в силу выпуклости функции прибыли, является точкой ее глобального максимума, и

$$\Pi_{\max} = \Pi(2,1) = -6 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2 + 28 \cdot 2 + 14 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 8 = 27 .$$

Ответ: $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $\Pi_{\max} = 27$.

Задача № 3. Найти решение транспортной задачи, если из A_2 в B_4 перевозки запрещены, из A_1 в B_3 должно быть доставлено не менее 30 единиц груза, а из A_3 в B_1 не более 20 единиц груза.

a_i/b_j	60	110	60	70
50	2	3	5	7
100	8	11	12	4
150	3	1	6	12

Решение. Согласно алгоритму решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями составим новую таблицу для построения начального плана методом Фогеля.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Разности по строкам			
a_i/b_j	20	110	30	70	40				
20	2	3	5	7 **20**	2	0	1	–	–
100	8 **20**	11 **10**	12 **30**	*M*	8 **40**	0	3	3	3
150	3	1 **100**	6	12 **50**	*M*	2	2	2	–
Разности по столбцам	1	2	1	5	6				
	1	2	1	5	–				
	5	10	6	*M*-12	–				
	0	0	0	–	–				

Вычисляя разности между минимальным и следующим за ним тарифом в каждой строке и столбце (вычисления приведены в дополнительных строках и столбцах), последовательно заполняем

- $x_{25} = 40$, столбец B_5 исключаем из рассмотрения;
- $x_{14} = 20$, строку A_1 исключаем из рассмотрения,
- $x_{34} = 50$, столбец B_4 исключаем из рассмотрения,
- $x_{32} = 100$, строку A_3 исключаем из рассмотрения,

- $x_{21} = 20$, $x_{22} = 60$, $x_{23} = 70$.

Теперь проверяем план на оптимальность с помощью метода потенциалов – вычисляем потенциалы и оценки свободных клеток. Результаты вычислений приведены

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
u_i/v_j	8	11	12	22	8
-15	2 $\boxed{-9}$	3 $\boxed{-7}$	5 $\boxed{-8}$	7 **20**	2 $\boxed{-9}$
0	8 **20**	11 **10**	12 **30**	M $\boxed{22-M}$	8 **40**
-10	3 $\boxed{-5}$	1 **100**	6 $\boxed{-4}$	12 **50**	M $\boxed{-2-M}$

Таким образом, полученный методом Фогеля план оптимален. Для получения оптимального плана исходной задачи увеличиваем суммируем результаты первого и третьего столбцов, а также увеличиваем значение x_{13}^* оптимального плана на 30. Получаем оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 20 \\ 60 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Суммарная стоимость перевозок

$$F\left(X^*\right) = 150 + 140 + 480 + 110 + 360 + 100 + 600 = 1940.$$

Ответ. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 20 \\ 60 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $F\left(X^*\right) = 1940$.

Задача № 4. Решить задачу линейного программирования $\begin{cases} z = -x_4 - 2x_5 - 5 \to \min \\ \quad x_1 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_3 - x_2 + 4x_4 - 4x_5 = 55, \\ 2x_3 - x_2 + 3x_4 - 3x_5 = 32, \\ \quad x_i \ge 0, i = 1,...,5 \end{cases}$ методом искусственного базиса.

Решение. Введем искусственные переменные y_1, y_2 и решим следующую задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min, \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + y_1 = 55, \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + y_2 = 32. \\ \overline{x} \geq 0, \overline{y} \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$F = y_1 + y_2 = 87 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 7x_5,$$

или

$$F - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 87.$$

Аналогично,

$$z + x_4 + 2x_5 = -5.$$

Решаем задачу оптимизации $F \to \min$, включив при этом в таблицу строку для функции z:

Б.П.	с.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
x_1	2	1	0	0	1	1	0	0
y_1	55	0	-1	3	4	-4	1	0
y_2	32	0	-1	2	3	-3	0	1
z	-5	0	0	0	1	2	0	0
F	87	0	-2	5	7	-7	0	0
x_1	2	1	0	0	1	1	0	0
y_1	7	0	1/2	0	-1/2	1/2	1	-3/2
x_3	16	0	-1/2	1	3/2	-3/2	0	1/2
z	-5	0	0	0	1	2	0	0
F	7	0	1/2	0	-1/2	1/2	0	-5/2
x_1	2	1	0	0	1	1	0	0
x_2	14	0	1	0	-1	1	0	-3
x_3	23	0	0	1	1	-1	0	-1

z	-5	0	0	0	1	2	0	0
F	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Согласно алгоритму метода искусственного базиса, вспомогательная задача решена и допустимый базис выделен. Теперь мы можем перейти к решению исходной задачи симплекс-методом. Удалив последнюю строку и столбцы, содержащие искусственные переменные, получим таблицу

Б.П.	с.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	0	0	1	1
x_2	14	0	1	0	-1	1
x_3	23	0	0	1	1	-1
z	-5	0	0	0	1	2
x_5	2	1	0	0	1	1
x_2	12	-1	1	0	-2	0
x_3	25	1	0	1	2	0
z	-9	-2	0	0	-1	0

Полученная таблица является заключительной, поэтому $z_{\min} = z\left(0,12,25,0,2\right) = -9$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(0,12,25,0,2\right) = -9$.

Задача № 5. Решить задачу целочисленного программирования

$$\begin{cases} z = 4x + 7y + 4 \to \max \\ \quad y - x - 4 \le 0, \\ \quad x + y - 7 \le 0 \\ x \in \mathrm{Z}, y \in \mathrm{Z}, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

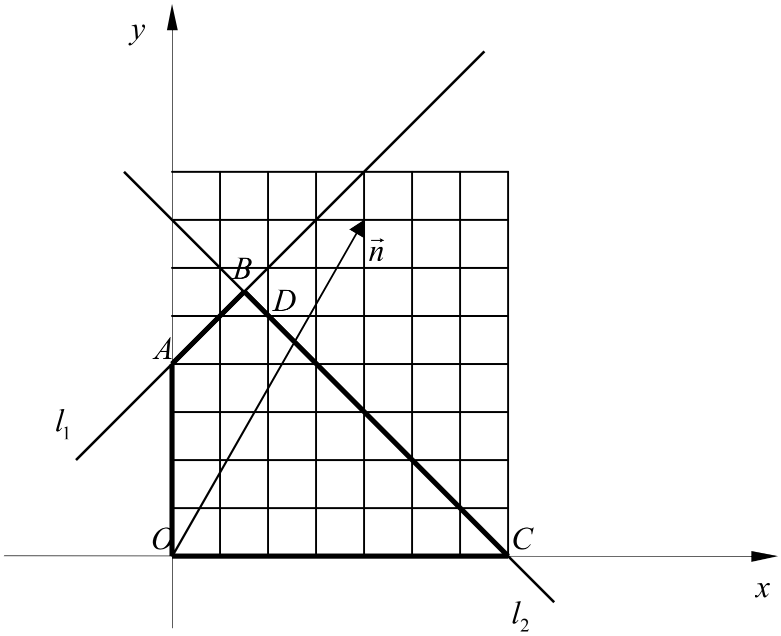
а) графическим способом;

б) методом Гомори;

в) дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

Решение.

а) Строим область на плоскости (x, y), заданную системой ограничений без условия целочисленности. Получаем четырехугольник $OABC$ с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$ и $C(7,0)$; при этом все решения системы ограничений задачи суть точки с целочисленными координатами на границе и внутри этого четырехугольника.



Строим вектор нормали $\vec{n} = (4,8)$ и, рассматривая в качестве возможных решений точки с целочисленными координатами в области, ограниченной четырехугольником $OABC$, находим, что $z_{\max} = z(D) = z(2,5) = 47$.

б) Приведем задачу (без условия целочисленности) к каноническому виду (для удобства переименуем переменные (x, y) в (x_1, x_2))

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

и решим задачу симплекс-методом

Б.П.	с.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	-1	1	1	0
x_4	7	1	1	0	1
z	4	-4	-7	0	0

x_2	4	-1	1	1	0
x_4	3	2	0	-1	1
z	32	-11	0	7	0
x_2	11/2	0	1	1/2	1/2
x_1	3/2	1	0	-1/2	1/2
z	97/2	0	0	3/2	11/2

План $X=\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2},0,0\right)$ не является оптимальным решением задачи целочисленного программирования. Так как дробные части координат полученного решения равны между собой, то составим дополнительное ограничение для переменной x_2. Так как соответствующая строка в последней симплекс таблице имеет вид

$$x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4=\frac{11}{2},$$

То к системе ограничений добавляем неравенство

$$\{1\}\,x_2+\left\{\frac{1}{2}\right\}x_3+\left\{\frac{1}{2}\right\}x_4\geq\left\{\frac{11}{2}\right\},\text{ т.е. }\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\geq\frac{1}{2},\text{ или }x_3+x_4\geq 1.$$

Вводим балансовую переменную x_5, переписываем последнее условие в виде

$$-x_3-x_4+x_5=-1$$

и добавляем его к заключительной симплекс-таблице. Получаем

Б.П.	с.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	11/2	0	1	1/2	1/2	0
x_1	3/2	1	0	-1/2	1/2	0
x_5	-1	0	0	-1	-1	1
z	97/2	0	0	3/2	11/2	0
x_2	5	0	1	0	0	1/2
x_1	2	1	0	0	1	-1/2

x_5	1	0	0	1	1	-1
z	47	0	0	0	4	3/2

Аналогично пункту а) получаем, что $z_{\max} = z(D) = z(2,5) = 47$. в) Из условий задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

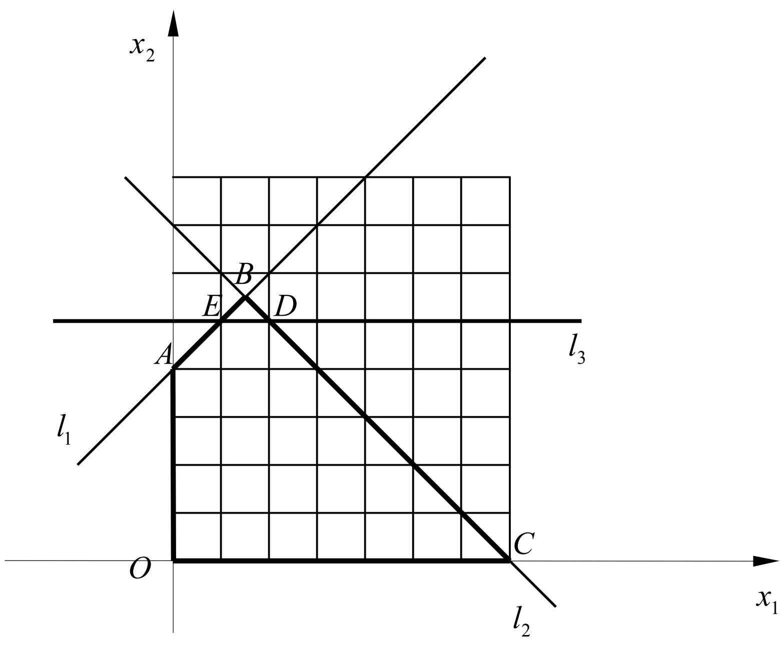
выразим переменные x_3, x_4

$$\begin{cases} x_3 = 4 + x_1 - x_2, \\ x_4 = 7 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

и подставим в дополнительное ограничение $x_3 + x_4 \geq 1$. Получим

$$x_3 + x_4 = 11 - 2x_2 \geq 1, \text{ т.е. } x_2 \leq 5.$$

Полуплоскость, заданная последним условием $x_2 \leq 5$ (прямая l_3 на рисунке задает границу этой полуплоскости $x_2 = 5$), отсекает от четырехугольника $OABC$ треугольник BDE, не содержащий целочисленных решений.

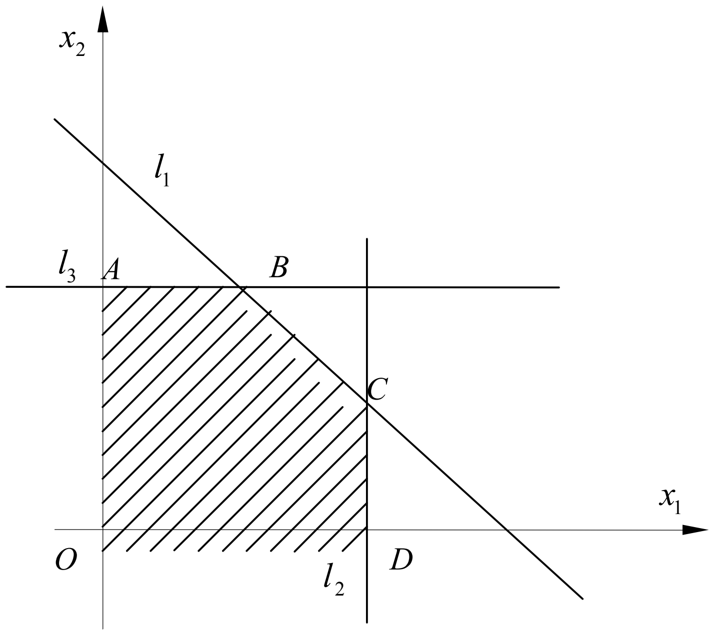


Максимальное значение функции z следует искать в области, ограниченной многоугольником $OAEDC$.

Ответ. $z_{\max} = z(2,5) = 47$

Задача № 6. Найти компромиссное решение многокритериальной задачи оптимизации $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 \le 12, x_2 \le 13 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ методом идеальной точки.

Решение. Область допустимых решений D исходной задачи задается системой неравенств $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 \le 12, x_2 \le 13 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$



Для построения области строим прямые

$$l_1 : x_1 + x_2 = 12$$

$$l_2 : x_1 = 12$$

$$l_3 : x_2 = 13$$

Выбирая соответствующие полуплоскости, получаем, что D представляет собой пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0;0)$, $A(0;13)$, $B(5;13)$, $C(12;6)$, $D(12;0)$.

Введем линейное преобразование $f : R^2 \to R^2$, определенное критериями f_1 и f_2:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом

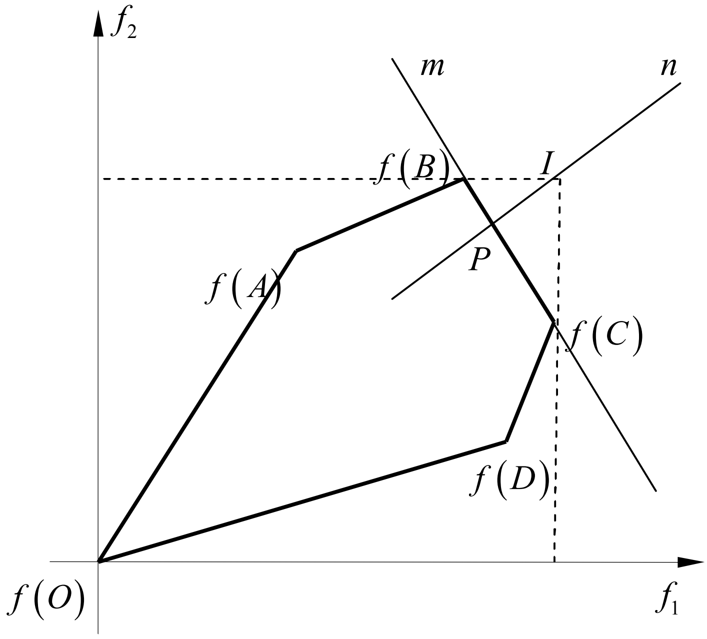
$$f(O) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 52 \end{pmatrix},$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 57 \end{pmatrix},$$

$$f(C)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\ 36\end{pmatrix},$$

$$f(D)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\ 12\end{pmatrix}.$$



В силу линейности f мы можем легко получить образ области D под действием преобразования f на плоскости (f_1,f_2) – это пятиугольник с вершинами в точках $f(O)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ и $f(D)$. При этом идеальной является точка I с координатами

$$(f_{1,\max},f_{2,\max})=(60,57),$$

не принадлежащая образу D в силу того, что оптимальные значения соответствующих целевых функций достигаются в различных точках.

Естественно предположить, что образом компромиссной точки является точка *P*, принадлежащая D и ближайшая к I. Легко видеть, что такой точкой является основание перпендикуляра *n*, опущенного из I на прямую *m*, соединяющую точки $f(B)$ и $f(C)$.

Найдем уравнение прямой m, проходящей через точки $f(B)$ (46;57) и $f(C)$ (60;36). Ее направляющим вектором является вектор

$$\vec{m}=(60-46,36-57)=(14,-21)\sim(2,-3),$$

поэтому каноническое (и общее) уравнение прямой m имеют вид

$$\frac{x_1-46}{2}=\frac{x_2-57}{-3},\text{ т.е. } 3x_1+2x_2-252=0.$$

Таким образом, направляющим вектором (перпендикулярным к *m*) прямой *n*, проходящей через точку *I*(60,57), является $\vec{n}=(3,2)$, а ее каноническим (и общим) уравнением

$$\frac{x_1-60}{3}=\frac{x_2-57}{2},\text{ т.е. } 2x_1-3x_2+51=0.$$

Координаты точки $P=m\cap n$ как решение системы уравнений

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-252=0,\\ 2x_1-3x_2+51=0.\end{cases}$$

Таким образом, точка P имеет координаты $P\left(\frac{654}{13};\frac{657}{13}\right)$. Наконец, находим компромиссную точку как прообраз P:

$$x^* = f^{-1}(P) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{654}{13} \\ \dfrac{657}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{93}{13} \\ \dfrac{141}{13} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x^* = \left(\frac{93}{13};\frac{141}{13}\right)$.

Задача № 7. Планируется работа двух предприятий на n лет. Начальные ресурсы равны $s_0 = 10000$. Средства x, вложенные в 1-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x) = 0,3x$, и возвращаются в размере $\varphi_1(x) = 0,1x$. Средства y, вложенные в 2-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_2(y) = 0,2y$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y) = 0,3y$. В конце года возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль.

Решение. Пусть u_i^k - средства, вложенные в k-е предприятие. Так как возвращенные средства распределяются полностью, то имеет место условие $s_{i-1} = u_i^1 + u_i^2$, т.е. $u_i^2 = s_{i-1} - u_i^1$. Далее будем считать, что управление на i-ом году определяется числом $u_i = u_i^1$, т.е. средствами, выделенными первому предприятию. Уравнения состояний имеют вид

$$s_i = 0.1u_i + 0.3(s_{i-1} - u_i) = 0.3s_{i-1} - 0.2u_i,$$

а прибыль на i-ом году равна

$$f(s_{i-1}, u_i) = f_1(u_i) + f_2(s_{i-1} - u_i) = 0.3u_i + 0.2(s_{i-1} - u_i) = 0.2s_{i-1} - 0.1u_i.$$

Тогда

$$z_3^*(s_3) = \max_{0 \le u_4 \le s_3} f(s_3, u_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_3} \left[f_1(u_4) + f_2(s_3 - u_4) \right] = \max_{0 \le u_4 \le s_3} \left[0.2s_3 - 0.1u_4 \right] = 0.2s_3$$

при $u_4^* = 0$.

$$z_2^*(s_2) = \max_{0 \le u_3 \le s_2} \left[f(s_2, u_3) + z_3^*(s_3) \right] = \max_{0 \le u_3 \le s_2} \left[0.2s_2 - 0.1u_3 + 0.2s_3 \right] =$$

$$= \max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.2s_2 - 0.1u_3 + 0.2\left(0.3s_2 - 0.2u_3\right)\right] = \max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.26s_2 - 0.14u_3\right] = 0.26s_2$$

при $u_3^* = 0$,

$$z_1^*\left(s_1\right) = \max_{0\le u_2\le s_1}\left[f\left(s_1,u_2\right) + z_2^*\left(s_2\right)\right] = \max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1 - 0.1u_2 + 0.26s_2\right] =$$

$$= \max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1 - 0.1u_2 + 0.26\left(0.3s_1 - 0.2u_2\right)\right] = \max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.278s_2 - 0.152u_2\right] = 0.278s_1$$

при $u_2^* = 0$,

$$z_0^*\left(s_0\right) = \max_{0\le u_1\le s_0}\left[f\left(s_0,u_1\right) + z_1^*\left(s_1\right)\right] = \max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0 - 0.1u_1 + 0.278s_1\right] =$$

$$= \max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0 - 0.1u_1 + 0.278\left(0.3s_0 - 0.2u_1\right)\right] = \max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2834s_0 - 0.1556u_1\right] = 0.2834s_0$$

при $u_1^* = 0$.

Ответ: $u_1^* = u_2^* = u_3^* = u_4^* = 0$, $z_0^*\left(s_0\right) = 0.2834s_0 = 2834$.

	1 год	2 год	3 год	4 год
I	0	0	0	0
II	10000	3000	900	300

Задача № 8. Планируется работа трех предприятий на 1 год. Начальные средства равны $s_0 = 4$ тыс. у.е., а вложения кратны 1 тыс. у.е. При этом x тыс. у.е., вложенные в k-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_k\left(x\right)$. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если

x	$f_1\left(x\right)$	$f_2\left(x\right)$	$f_3\left(x\right)$
1	2	3	1
2	7	6	6
3	13	12	14
4	17	19	18

.

Решение.

s_{k-1}	u_k	s_k	$k=3$		$k=2$		$k=1$	
			$f_3\left(u_3\right)$	u_3^*	$f_2\left(u_2\right)+z_2^*\left(s_2\right)$	u_2^*	$f_1\left(u_1\right)+z_1^*\left(s_1\right)$	u_1^*
0	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0		0+1			
	1	0	**1**	1	**3+0=3**	1		
2	0	2	0		**0+6=6**	0		
	1	1	1		3+1			
	2	0	**6**	2	**6+0=6**	2		
3	0	3	0		**0+14=14**	0		

	1	2	1		3+6			
	2	1	6		6+1			
	3	0	**14**	3	12+0			
4	0	4	0		0+18		**0+19=19**	0
	1	3	1		3+14		2+14	
	2	2	6		6+6		7+6	
	3	1	14		12+1		13+1	
	4	0	**18**	4	**19+0=19**	4	17+0	

Ответ: $u_1^* = 0, u_2^* = 4, u_3^* = 0$, $z_0^*(s_0) = 19$.

Задача № 9. Игра задана платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Составить соответствующую игрокам пару двойственных задач, найти оптимальные стратегии и цену игры.

Решение.

<u>I игрок</u>

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

<u>II игрок</u>

$$\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем симплекс-методом задачу для II игрока:

базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b_i
y_4	2	1	3	1	0	0	1
y_5	1	2	3	0	1	0	1
y_6	2	3	1	0	0	1	1
φ	-1	-1	-1	0	0	0	0

базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b_i
y_4	$4/3$	0	$8/3$	1	0	$-1/3$	$2/3$
y_5	$-1/3$	0	7/3	0	1	$-2/3$	$1/3$
y_2	$2/3$	1	$1/3$	0	0	$1/3$	$1/3$
φ	$-1/3$	0	$-2/3$	0	0	$1/3$	$1/3$

базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b_i
y_4	$12/7$	0	0	1	$-8/7$	$3/7$	$2/7$
y_3	$-1/7$	0	1	0	$3/7$	$-2/7$	$1/7$
y_2	$5/7$	1	0	0	$-1/7$	$3/7$	$2/7$
φ	$-3/7$	0	0	0	$2/7$	$1/7$	$3/7$

базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b_i
y_1	1	0	0	$7/12$	$-2/3$	$1/4$	$1/6$
y_3	0	0	1	$1/12$	$1/3$	$-1/4$	$1/6$
y_2	0	1	0	$-5/12$	$1/3$	$1/4$	$1/6$
φ	0	0	0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$

Поэтому $y^* = \left(1/6, 1/6, 1/6, 0, 0, 0\right)$, цена игры $\nu = 2$, $q^* = \left(1/3, 0, 1/3\right)$. Из последней строки находим $x^* = \left(1/4, 0, 1/4\right)$, $p^* = \left(1/2, 0, 1/2\right)$.

Ответ: $\nu = 2$, $p^* = \left(1/2, 0, 1/2\right)$, $q^* = \left(1/3, 0, 1/3\right)$.